

I. 下記の空欄イ～ホにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ.

(1) 方程式 $\log_9 x^2 + \log_3(x - 4) = 3$ の解は $x =$ イ である.

(2) t を実数とする. x についての2次方程式 $x^2 - tx + t^3 = 0$ が実数解 α, β を持つとき, $\alpha^2 + 3\alpha\beta + \beta^2$ の最大値は ロ である.

(3) 関数 $f(x) =$ ハ は等式

$$f(x) = e^x + \int_0^1 f(t)t \, dt$$

を満たす.

(4) 実数 a に対し行列

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & a^2+1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}$$

を考える. 自然数 n に対し

$$E + A + A^2 + \cdots + A^{2n-1} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \quad (E \text{ は単位行列})$$

とおくとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が存在するための必要十分条件は $|a| <$ ニ である.

また, そのとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ ホ である.

Ⅱ. m を実数とする. 円 $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ と, 直線 $y = mx$ の2つの交点を P , Q とする.

(i) P , Q の座標を m を使って表わせ. (ここで P として, 2つある交点のどちらをとってもよい.)

(ii) 線分 PQ の中点 M の座標を (X, Y) としたとき, X と Y を m の式で表わせ.

(iii) m が実数全体を動くとき, X の値のとり得る範囲を求めよ.

(iv) m が実数全体を動くとき, M の軌跡の方程式を求め, 図示せよ.

Ⅲ. θ が $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, xy 平面の点 $(\tan \theta, \sin 2\theta)$ が描く曲線を考える.

(i) 曲線の方程式 $y = f(x)$ を求めよ.

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を求めよ.

(iii) 曲線の概形を描け.

(iv) 曲線と直線 $y = x$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

IV. $1, 2, 3$ の番号のついたカードがそれぞれ 1 枚ずつある. この中からカードを任意に 1 枚取り出し番号を確認し, またもとに戻すという操作を n 回繰り返す. 出た番号を順に $a_1, a_2, \dots, a_n$ とする.

(i) $a_1, a_2, \dots, a_n$ の中に $1, 2, 3$ がすべて入っている確率を求めよ.

(ii) $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ となる確率を求めよ.

(iii) $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ が 4 の倍数である確率を求めよ.