

I

(i)

$$\text{与式} = \left(3^2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)^3 \times \left(3^2\right)^{\frac{8}{5}} \times \frac{1}{3^{\frac{6}{5}}} = 3^{7+\frac{16}{5}-\frac{6}{5}} = \underline{\underline{3^9}} \quad (\text{イ})$$

(ii)

$$\log_3(x-3)(x+5) = \log_3 9, \quad (x-3)(x+5) = 9, \quad x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$(x+6)(x-4) = 0 \quad \text{真数条件より } x > 3 \quad \therefore x = \underline{\underline{4}} \quad (\text{ロ})$$

(iii)

はじめの方の項を書き出すと, $a_1 = 11, a_2 = 17, a_3 = \frac{1}{11 \cdot 17},$

$$a_4 = \frac{1}{17 \cdot \frac{1}{11 \cdot 17}} = 11, a_5 = \frac{1}{\frac{1}{11 \cdot 17} \cdot 11} = 17, a_6 = \frac{1}{11 \cdot 17}, \dots$$

となり 3 項ずつ繰り返されることがわかる。2004 = 3 × 668 より,

$$a_{2004} = a_3 = \underline{\underline{\frac{1}{187}}} \quad (\text{ハ})$$

(iv)

$$x^3 + ax + 2 = B(x-2) + x + 4, \quad x=2 \text{ を代入して } 8 + 2a + 2 = 2 + 4$$

$$\therefore a = \underline{\underline{-2}}, \quad x^3 - 3x - 2 = B(x-2) \quad (\text{ニ})$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ & 0 & 2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

割り算を実行して, $B = \underline{\underline{x^2 + 2x + 1}} \quad (\text{ホ})$

(v)

$$\cos \theta = t \text{ とおくと } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ より } -1 \leq t \leq 1$$

$$2 \cos \theta - \cos 2\theta = 2t - (2t^2 - 1) = -2 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$$

これは $t = \cos \theta = \frac{1}{2}$ つまり $\theta = \underline{\underline{60^\circ}}$ のとき, 最大値 $\underline{\underline{\frac{3}{2}}}$ をとる。
(ヘ) (ト)

II

(i)

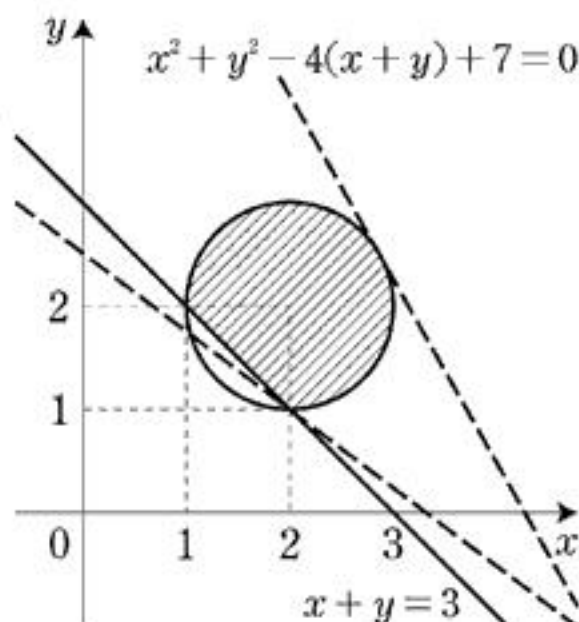
① $\iff (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1$ これは $(2, 2)$ を中心とする半径 1 の円周から内側。②は直線 $x+y=3$ から上側。

$x^2 + y^2 - 4(x+y) + 7 = 0 \cdots \textcircled{3}$, $x+y=3$ を連立すると
 $x^2 + (3-x)^2 - 4 \cdot 3 + 7 = 0 \quad \therefore x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0$
 $\therefore x=1, 2$

円と直線は $(1, 2)$, $(2, 1)$ で交わる。

領域 D は右図斜線部

(境界線上の点を含む)



(ii)

$\frac{y+1}{x-5} = k$ とおくと, $y+1=k(x-5) \cdots \textcircled{4}$ は点 $(5, -1)$ を通る傾き k の直線を表す。

(a) 円③と直線④が接する $\iff (2, 2)$ と④との距離が 1

$$\iff \frac{|2k - 2 - 5k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1 \iff 9(k+1)^2 = k^2 + 1$$

$$\iff 4k^2 + 9k + 4 = 0 \iff k = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{8}$$

右上図より, 円の上側で接するのは $k = \frac{-9 - \sqrt{17}}{8}$ のとき

(b) 直線④が $(2, 1)$ を通るとき, $1+1=k(2-5) \quad \therefore k = -\frac{2}{3}$

右上図より, 傾き k のとりうる値の範囲を考えて

最大値: $-\frac{2}{3}$, 最小値: $\frac{-9 - \sqrt{17}}{8} \quad \cdots$ (答)

Ⅲ

(i)

P の座標	b	a
確率	$1-q$	q

$$\begin{aligned} \text{左表より } E_1 &= b(1-q) + aq \\ &= b - bq + aq \quad \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

(ii)

サイコロを 2 回振って P が座標 ab に来る確率は、1 回目偶数、2 回目奇数と出るか、1 回目奇数、2 回目偶数と出る場合だから、
 $2q(1-q) \quad \therefore E_2 = b^2(1-q)^2 + ab \cdot 2q(1-q) + a^2q^2$
 $= (b - bq + aq)^2 \quad \cdots (\text{答})$

(iii)

(i), (ii)より、 $E_n = (b - bq + aq)^n$ と予測できる。

(a) $n=1$ のとき、(i)より予測は正しい。

(b) $n=k$ のとき、 $E_k = (b - bq + aq)^k$ だとして、

$k+1$ 回目に確率 q で aE_k に、確率 $1-q$ で bE_k に移動するから、

$$\begin{aligned} E_{k+1} &= (1-q)bE_k + q \cdot aE_k = (b - bq + aq)E_k \\ &= (b - bq + aq)^{k+1} \end{aligned}$$

よって $n=k+1$ のときも予測は正しい。

(a), (b)より $E_n = (b - bq + aq)^n \quad \cdots (\text{答})$

(iv)

(iii)より、 $E_1 = b - bq + aq = 1$ であれば任意の自然数 n について $E_n = 1$ である。

IV

複素数 z の実部を $\operatorname{Re}(z)$ と表すことにする。

$$z = x + iy \text{ のとき } \bar{z} = x - iy \quad \text{よって } \operatorname{Re}(z) = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \operatorname{Re}(w) &= \frac{1}{2}(w + \bar{w}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+1-i} - \frac{1+i}{4} + \frac{1}{\bar{z}+1+i} - \frac{1-i}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\bar{z}+1+i+z+1-i}{(z+1-i)(\bar{z}+1-i)} - \frac{1}{2} \right\} = \frac{\frac{z+\bar{z}}{2} + 1}{|z+1-i|^2} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{x+1}{(x+1)^2 + (y-1)^2} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{-(x-1)^2 - (y-1)^2 + 4}{4\{(x+1)^2 + (y-1)^2\}} \quad \dots \text{(答)} \end{aligned}$$

(ii)

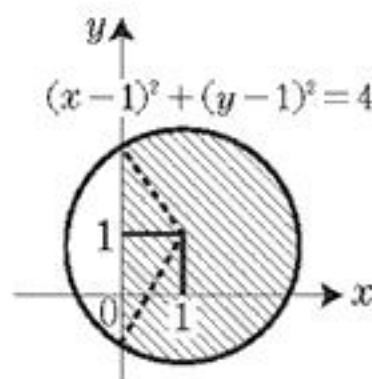
“ $\operatorname{Re}(z) = x \geq 0$ かつ $\operatorname{Re}(w) \geq 0$ ” は,

$(x+1)^2 + (y-1)^2 > 0$ ($z \neq -1+i$) より,

$x \geq 0$ かつ $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4$ と同値 ($z \neq -1+i$ を満たす)

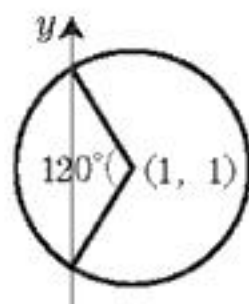
(iii)

(ii)より, $(1, 1)$ を中心とする半径 2 の円周から内側で, y 軸から右の部分。図示すると, 右図斜線部 (境界線上の点を含む)



(iv)

右図のように(iii)の境界線の円が y 軸から切り取る弦を, 中心 $(1, 1)$ から見込む角は 120° 。 よって求める面積は,



$$\underbrace{\pi \cdot 2^2}_{\bigcirc} - \left(\underbrace{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2}_{\diamond} - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 120^\circ}_{\triangledown} \right) = \frac{8}{3}\pi + \sqrt{3}$$