

I

(i)

$$3^x = t (> 0) \text{ とおくと, } 2t - \frac{3}{t} = 1$$

$$t \text{ をかけて } 2t^2 - t - 3 = (t+1)(2t-3) = 0$$

$$t > 0 \text{ より } t = 3^x = \frac{3}{2} \quad \therefore x = \log_3 \frac{3}{2} = \underbrace{1 - \log_3 2}_{(1)}$$

(ii)

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 5^2 - 2 \cdot 3 = \underbrace{19}_{(12)}$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 5 \cdot (19 - 3) = \underbrace{80}_{(13)}$$

(iii)

$$z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \sqrt{6}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ), \quad \arg z_1 = 45^\circ$$

$$z_2 = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3}{2}\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ), \quad \arg z_2 = 45^\circ$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 = \underbrace{90^\circ}_{(14)}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 = \underbrace{0^\circ}_{(15)}$$

(iv)

abc を 1 かたまりと見て, abc, d, e, f の並べ方は $4!$ 通り,
 a, b, c の並べ方は $3!$ 通り, a, b, c が隣り合う並べ方は
 $\underbrace{4! \times 3!}_{(16)} = 144$ 通り

a, b, c, d, e, f 6 文字の並べ方は $6!$ 通り。

そのうち, a, b が隣接するのは $2! \times 5!$ 通り。

a, b が隣り合わない並べ方は $6! - 2! \times 5! = \underbrace{480}_{(17)}$ 通り。

II

(i)

直円錐の頂点を P ， PB と底円との交点を K ， P から底円に下ろした垂線の足を J とする。

$BF : PJ = FK : JK$ より

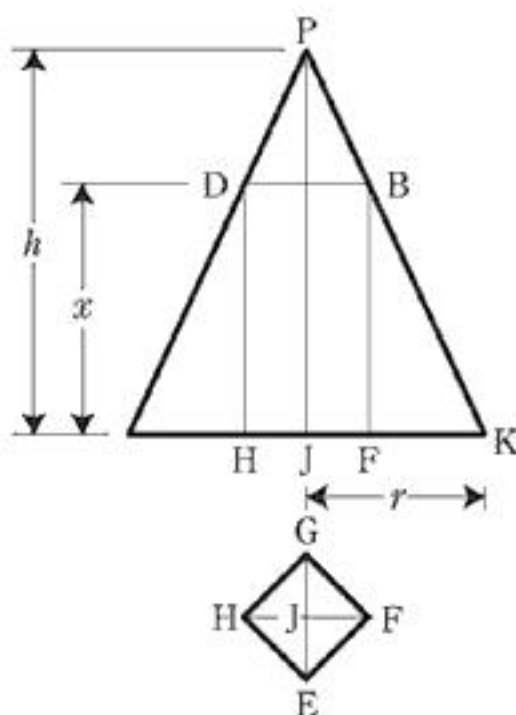
$$x : h = FK : r \quad \therefore \quad FK = \frac{xr}{h}$$

$$EJ = JK - FK = \left(1 - \frac{x}{h}\right)r$$

直方体の体積： $V = FJ^2 \times 2 \times x$

$$= \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 r^2 \cdot 2x$$

$$= \frac{2r^2}{h^2} (x^3 - 2hx^2 + h^2x)$$



(ii)

$$V = f(x) \text{ とおくと, } f'(x) = \frac{2r^2}{h^2} (3x^2 - 4hx + h^2)$$

$$= \frac{2r^2}{h^2} (x - h)(3x - h)$$

x	0		$\frac{h}{3}$		h
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{8}{27}r^2h$	$\searrow$	

$$f\left(\frac{h}{3}\right) = \frac{2r^2}{h^2} \left(\frac{h^3}{27} - 2h \cdot \frac{h^2}{9} + h^2 \cdot \frac{h}{3}\right)$$

$$= \frac{8}{27}r^2h$$

増減表より，直方体の高さ $x = \frac{h}{3}$ のとき，

直方体の体積は最大値 $\frac{8}{27}r^2h$ をとる。

Ⅲ

(i)

$$y = x^2 + 2ax + 2 \quad \cdots \textcircled{1} \qquad y = 4x - 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②を連立すると, $x^2 + 2ax + 2 = 4x - 1$

整理して, $x^2 + 2(a-2)x + 3 = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$

交点が1つだけのとき, ③は重解をもつから,

$$\textcircled{3} \text{の判別式 } \frac{D}{4} = (a-2)^2 - 3 = a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$\therefore \underline{\underline{a = 2 \pm \sqrt{3}}}$$

(ii)

③の左辺を $f(x)$ とおく。

$$\text{題意} \iff \begin{cases} \cdot \text{判別式: } \frac{D}{4} = a^2 - 4a + 1 > 0 & \cdots \textcircled{4} \\ \cdot \text{軸の位置: } 2-a \text{ について } 2-a > 0 & \cdots \textcircled{5} \\ \cdot f(0) = 3 > 0 \end{cases}$$

④かつ⑤より “ $a < 2 - \sqrt{3}$ または $2 + \sqrt{3} < a$ ” かつ $a < 2$

$$\therefore \underline{\underline{a < 2 - \sqrt{3}}}$$

IV

(i)

$$a_2 = 2, \quad a_3 = a_4 = 4$$

(ii)

第 k 年度に生まれた $\frac{b_k}{2}$ 匹のメスが第 $k+1$ 年度に $2N$ 匹ずつ
個体を生むから,

$$b_{k+1} = \frac{b_k}{2} \cdot 2N = Nb_k \quad (k \geq 2), \quad b_2 = 2N$$

よって $\{b_k\}$ は初項 $b_2 = 2N$, 公比 N の等比数列で $b_k = 2N^{k-1}$

(iii)

第 k 年度の初期に生きている個体は, 第 $k-1$ 年度, 第 $k-2$ 年
度に生まれた個体だから, $a_k = b_{k-1} + b_{k-2} = \underline{2N^{k-2} + 2N^{k-3}} \quad (k \geq 4)$

$$ak_{+1} > ak \text{ より, } 2N^{k-1} + 2N^{k-2} > 2N^{k-2} + 2N^{k-3}$$

$$\therefore N^{k-1} - N^{k-3} = N^{k-3}(N+1)(N-1) > 0$$

これが $k \geq 4$ となる任意の整数 k について成り立つのは, $N > 1$
のとき