

I

(1)

$$\log_2 2^x = x = \log_{16} 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 16} = \frac{2 \log_2 3}{4} = \log_2 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore 2^x = \underbrace{\sqrt{3}}_{(1)}$$

(2)

$$1+i = \sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) \text{ より,}$$

$$(1+i)^{10} = 2^5 (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)^{10}$$

$$= 2^5 (\cos 450^\circ + i \sin 450^\circ) = 2^5 (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 2^5 i$$

$$\therefore \frac{2^5}{(1+i)^{10}} = \frac{1}{i} = -i = a+bi \text{ より } a=0, b=-1$$

$$\therefore a^2 - b^2 = 0 - 1 = \underbrace{-1}_{(\square)}$$

(3)

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき } -\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6}$$

$$\text{このとき } \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0 \text{ となるのは } 0 \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6}$$

$$\text{つまり } \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき}$$

$$\text{よって } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) dx$$

$$= \left[ \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \left[ \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \cos 0 - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \left(\cos \frac{\pi}{6} - \cos 0\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \underbrace{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}_{(\wedge)}$$

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ より,}$$

$$a_k = 2^k, \quad d_k = (-1)^k, \quad c_k = 0 \text{ と予測する。}$$

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 2^k & b_k \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & b_{k+1} \\ 0 & (-1)^{k+1} \end{pmatrix}$$

$$\text{より予測は } k=1, 2, 3, \dots \text{ で成り立つ。} \quad a_k d_k - b_k c_k = (-2)^k \text{ より,}$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k d_k - b_k c_k) = \sum_{k=1}^n (-2)^k = -2 \cdot \frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} = \underbrace{-\frac{2}{3} \{1 - (-2)^n\}}_{(=)}$$

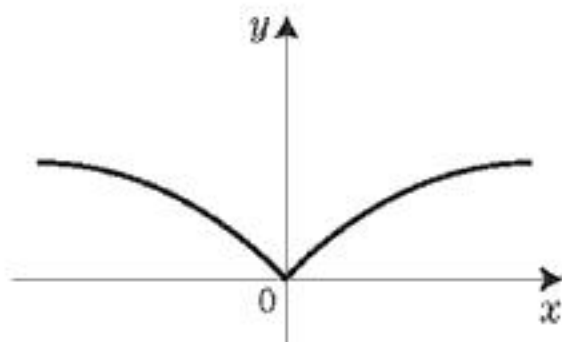
(5)

$$3 \text{ 組は区別できず, 異なる } 3 \text{ 組の並べ方は } 6 \text{ 通りあるから,}$$

$${}_9\text{C}_3 \times {}_6\text{C}_3 \div 6 = \underbrace{280}_{(*)} \text{ 通り}$$

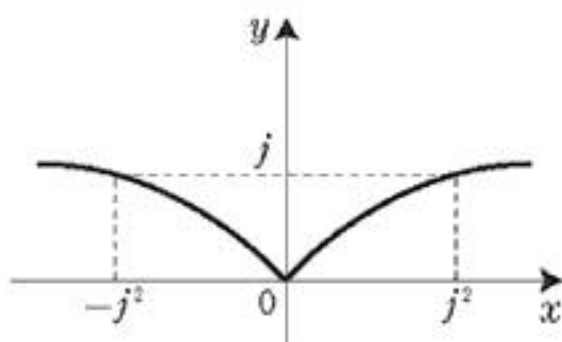
II

- (i)  $x \geq 0$  のとき  $y^2 = x$   
 $x \leq 0$  のとき  $y^2 = -x$   
 曲線の概形は右図。



- (ii)  $y^2 \geq |x|$  をみたす領域は、(i)の曲線から上側の部分。

直線  $y = j$  と曲線  $y^2 = |x|$  は  
 $(\pm j^2, j)$  で交わるので、 $E(k)$  に  
 属する点のうち直線  $y = j$  上にあ  
 るものは、 $-j^2 \leq x \leq j^2$  をみたす整  
 数  $x$  の個数を数えて  $2j^2 + 1$  個



これを  $j = 0, 1, 2, \dots, k$  について加え合わせるにより、

$$\begin{aligned} N(k) &= \sum_{j=0}^k (2j^2 + 1) = 2 \sum_{j=1}^k j^2 + k + 1 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) + k + 1 \\ &= \frac{1}{3} (k+1)(2k^2 + k + 3) \end{aligned}$$

- (iii) 関数  $f(x) = \frac{1}{3}(x+1)(2x^2 + x + 3) = \frac{1}{3}(2x^3 + 3x^2 + 4x + 3)$

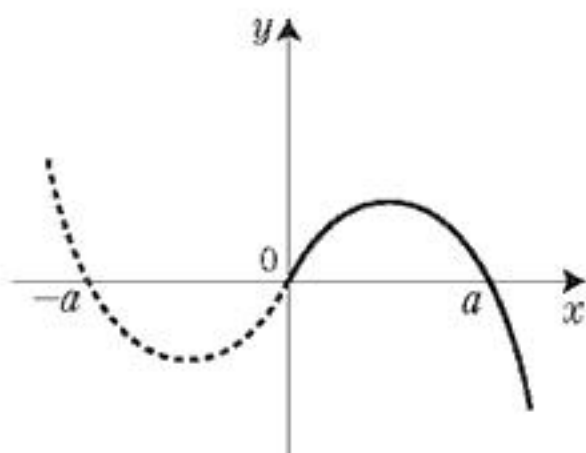
を考えると

$$f'(x) = 2x^2 + 2x + \frac{4}{3} = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{6} > 0 \text{ より,}$$

$f(x)$  は  $x$  の増加関数で  $k$  を増加させると  $N(k)$  も単調増加

$N(11) = 1024$ ,  $N(12) = 1313$  より,  $N(k) \geq 1300$  をみたす最小の  
 整数  $k$  は,  $k = 12$

$C(a): y = -x^3 + a^2x = -x(x+a)(x-a)$  ( $x \geq 0$ ) のグラフの概形は右図。



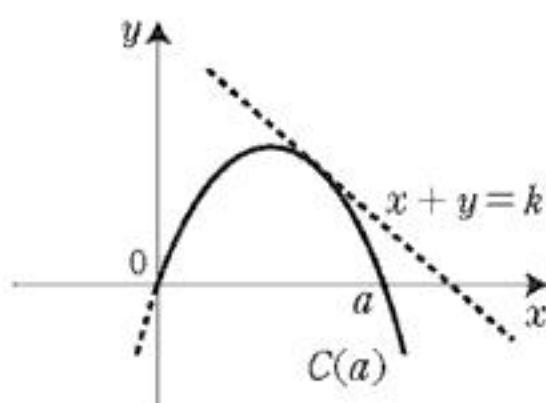
$$\begin{aligned}
 \text{(i) 体積 } V &= \int_0^a \pi(-x^3 + a^2x)^2 dx = \pi \int_0^a (x^6 - 2a^2x^4 + a^4x^2) dx \\
 &= \pi \left[ \frac{x^7}{7} - \frac{2}{5}a^2x^5 + \frac{a^4}{3}x^3 \right]_0^a \\
 &= \pi a^7 \left( \frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{105} \pi a^7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii) (イ) } f(x) &= -x^3 + a^2x \text{ として, } f'(x) = -3x^2 + a^2 \\
 f'(a) &= -3a^2 + a^2 = -1 \text{ として } a > 0 \text{ より } a = \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{(ロ) ① } a \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ のとき}$$

$$f'(a) = -2a^2 \leq -1$$

このときは、右図のように  $x+y=k$  が  $C(a)$  と第1象限で接するとき  $x+y$  は最大となる。



$$f'(x) = -3x^2 + a^2 = -1 \text{ とすると } x = \sqrt{\frac{a^2+1}{3}},$$

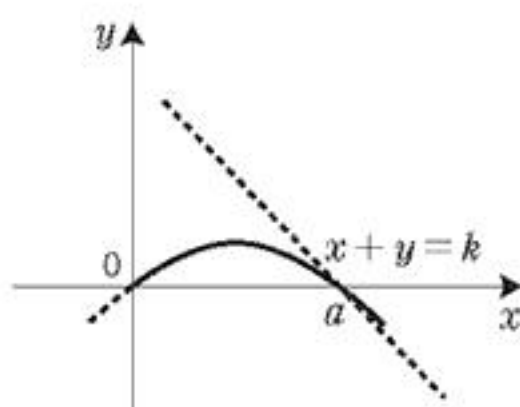
$$\text{このとき } y = f\left(\sqrt{\frac{a^2+1}{3}}\right) = \frac{2a^2-1}{3} \sqrt{\frac{a^2+1}{3}}$$

$$\begin{aligned}
 x+y \text{ の最大値は } &\sqrt{\frac{a^2+1}{3}} + \frac{2a^2-1}{3} \sqrt{\frac{a^2+1}{3}} \\
 &= \frac{2}{3}(a^2+1) \sqrt{\frac{a^2+1}{3}}
 \end{aligned}$$

$$\text{② } 0 < a \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ のとき}$$

$$f'(a) = -2a^2 \geq -1$$

このときは、右図のように  $x+y=k$  が  $(a, 0)$  を通るときに  $x+y$  は最大となる。



$$x+y \text{ の最大値は } a+0=a$$

①, ②より,  $x+y$  の最大値は,

$$a \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ のとき } \frac{2}{3}(a^2+1) \sqrt{\frac{a^2+1}{3}},$$

$$0 < a \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ のとき } a$$

IV

$$(i) \quad M\left(\frac{s+t}{2}, \frac{s+t}{2st}\right) \text{ より}$$

$$OM^2 = \left(\frac{s+t}{2}\right)^2 + \left(\frac{s+t}{2st}\right)^2 = \frac{1}{4}(s+t)^2 \left(1 + \frac{1}{s^2 t^2}\right)$$

$$\therefore OM = \frac{s+t}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{s^2 t^2}}$$

$$(ii) \quad PQ^2 = (s-t)^2 + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t}\right)^2 = (s-t)^2 \left(1 + \frac{1}{s^2 t^2}\right) = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{このとき, } OM^2 &= \frac{1}{4} \{(s-t)^2 + 4st\} \left(1 + \frac{1}{s^2 t^2}\right) \\ &= \frac{1}{4} (s-t)^2 \left(1 + \frac{1}{s^2 t^2}\right) + st + \frac{1}{st} \\ &= \frac{1}{4} + st + \frac{1}{st} \end{aligned}$$

相加平均, 相乗平均の関係より,

$$OM^2 = \frac{1}{4} + st + \frac{1}{st} \geq \frac{1}{4} + 2\sqrt{st \cdot \frac{1}{st}} = \frac{9}{4}$$

等号成立は  $st = \frac{1}{st}$ , つまり  $st=1$ , これを①に代入すると,

$$(s-t)^2 = \frac{1}{2}, \quad s < t \text{ より } t-s = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore s\left(s + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

$$\sqrt{2}s^2 + s - \sqrt{2} = (\sqrt{2}s - 1)(s + \sqrt{2}) = 0$$

$$s > 0 \text{ より } s = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad t = \sqrt{2}$$

以上より,  $OM$  の最小値は  $\frac{3}{2}$ ,

$$\text{このとき } P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right), \quad Q\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$