

2004年度

H 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべて**HBの黒鉛筆**または**HBの黒のシャープペンシル**で記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は**8ページ**までとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号は**I～IV**となっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、出席票の受験番号が、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し、出席票の氏名欄に**氏名**のみを記入してください。なお、出席票は切り離さないでください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を折り曲げたり、破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 次の空欄イ～トに当てはまる数または式を記入せよ。解答は解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) $(9\sqrt[3]{3})^3 \times (3^2)^{\frac{8}{5}} \times \frac{1}{\sqrt[5]{9^3}}$ を 3 の累乗の形に表すと である。

(ii) x が $\log_3(x-3) + \log_3(x+5) = 2$ を満たすとき、 $x =$ である。

(iii) 数列 $\{a_n\}$ が、

$$a_1 = 11, a_2 = 17, a_{n+2} = \frac{1}{a_n a_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たすとき、 $a_{2004} =$ である。

(iv) a を定数とすると、3次式 $A = x^3 + ax + 2$ を整式 B で割ったところ、商が $x - 2$ 、余りが $x + 4$ となった。 a は 、 B は である。

(v) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、

$$2\cos\theta - \cos 2\theta$$

の値が最大となるのは $\theta =$ のときで、最大値は である。

Ⅱ. 次の問(i), (ii)に答えよ. 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) 連立不等式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(x + y) + 7 \leq 0 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x + y \geq 3 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

の表す領域Dを図示せよ.

(ii) 点 (x, y) がDを動くとき, $\frac{y+1}{x-5}$ の最大値, 最小値を求めよ.

Ⅲ. 正定数 a, b は $0 < b < 1 < a$ を満たすとする. 数直線上を座標 1 の点から出発して動く点 P がある. サイコロを振って, 出た目が偶数のとき, 点 P を現在の座標の a 倍の点に, 奇数のとき, 点 P を現在の座標の b 倍の点に移動させる. ここで使用したサイコロにおいては, 偶数の目が出る確率が q ($0 < q < 1$) であるものとする. このとき, 以下の問 (i) ~ (iv) に答えよ. 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) サイコロを 1 回振って移動した後の点 P の座標の期待値 E_1 を, a, b, q の式で表せ.

(ii) サイコロを 2 回振って移動した後の点 P の座標の期待値 E_2 を, a, b, q の式で表せ.

(iii) サイコロを n 回振って移動した後の点 P の座標の期待値 E_n を, a, b, q の式で表せ.

(iv) (i) で求めた E_1 が 1 であるとき, 任意の自然数 n に対して, $E_n = 1$ であることを証明せよ.

IV. 複素数 z に対して

$$w = \frac{1}{z+1-i} - \frac{1+i}{4}$$

により w を定める. ここで i は虚数単位とし, $z \neq -1+i$ とする. このとき, 次の問 (i)~(iv)に答えよ. 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) $z = x + iy$ (x, y は実数) とするとき, w の実部を x, y を用いて表せ.

(ii) $z = x + iy$ (x, y は実数) とするとき, z と w の実部がともに 0 以上になるために, x, y が満たすべき必要十分条件を求めよ.

(iii) 複素数 z, w の実部がともに 0 以上になるような z に対応する複素数平面上の点全体の集合を考える. この集合を複素数平面上に図示せよ.

(iv) (iii)で図示した図形の面積を求めよ.