

立教大学数学科

2004年度

I a 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は12ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はI～IVとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 下記の空欄イ～ホにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ.

(1) $x = \log_{16} 9$ のとき, 2^x を簡単にすると イ である.

(2) $\frac{2^5}{(1+i)^{10}} = a + bi$ (a, b は実数, i は虚数単位) であるとき,

$a^2 - b^2 =$ ロ である.

(3) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right| dx$ の値は ハ である.

(4) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする. 自然数 k に対し, $A^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$ と表すとき,

$\sum_{k=1}^n (a_k d_k - b_k c_k)$ の値は ニ である. ただし, n は自然数とする.

(5) A, B, C, D, E, F, G, H, I の 9 人を 3 人ずつ 3 つの組に分ける方法は

ホ 通りある.

II. k を正の整数とする. 座標平面上において, 連立不等式

$$y^2 \geq |x|, \quad 0 \leq y \leq k$$

の表す領域を $E(k)$ とする. $E(k)$ に属し, かつ x 座標と y 座標がともに整数である点 (x, y) の個数を $N(k)$ とする.

(i) $y \geq 0$ の範囲で, 曲線 $y^2 = |x|$ の概形を描け.

(ii) $N(k)$ を k の式で表せ.

(iii) $N(k) \geq 1300$ となる最小の整数 k を求めよ.

Ⅲ. a を正の数とする. 座標平面上において, 曲線 $C(a): y = -x^3 + a^2x$ ($x \geq 0$) と x 軸とで囲まれる図形を $D(a)$ とする. ただし, $D(a)$ は境界を含むものとする.

(i) $D(a)$ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

(ii)(イ) 点 $(a, 0)$ における $C(a)$ の接線の傾きが -1 になるときの a の値を求めよ.

(ロ) a は正の数すべてをとるものとする. 点 (x, y) が $D(a)$ を動くとき, $x+y$ の最大値を a を用いて表せ.

IV. 座標平面上に曲線 $xy = 1$ ($x > 0$) がある.

この曲線上に2点 $P\left(s, \frac{1}{s}\right)$, $Q\left(t, \frac{1}{t}\right)$ ($s < t$) をとり, 線分 PQ の中点を M , 原点を O とする.

(i) 線分 OM の長さを, s と t を用いて表せ.

(ii) 線分 PQ の長さが一定値 1 をとるようにして P , Q を動かすとき, 線分 OM の長さの最小値を求めよ. また, このときの P と Q の座標を求めよ.