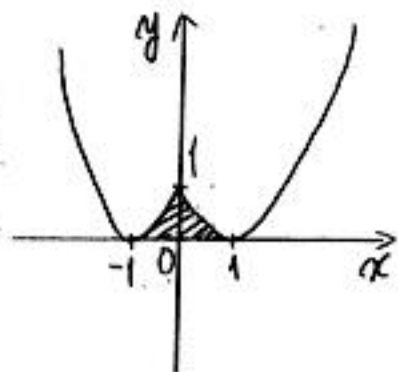


$$I. (i) y = x^2 - 2|x| + 1 = \begin{cases} (x-1)^2 & (x \geq 0) \\ (x+1)^2 & (x < 0) \end{cases}$$

曲線は右図のようになるので求める面積は
図の斜線部となる。



$$\begin{aligned} \text{よって } & \int_{-1}^0 (x+1)^2 dx + \int_0^1 (x-1)^2 dx \\ &= 2 \int_0^1 (x-1)^2 dx \\ &= \frac{2}{3} \dots \text{ア} \end{aligned}$$

$$(ii) (2+2i)(x+4i) = 2x-8 + (2x+8)i = 8+yi$$

上記の式の実部と虚部を比較して

$$\begin{cases} 2x-8 = 8 \\ 2x+8 = y \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad \begin{aligned} x &= \frac{8}{2} = 4 \dots \text{イ} \\ y &= 24 \dots \text{ウ} \end{aligned}$$

$$(iii) f(x) = ax^2 + bx + c \text{ とする}$$

$$\text{条件より } f(1) = a+b+c = 10 \dots \text{①}$$

$$f(2) = 4a+2b+c = 19 \dots \text{②}$$

$$f(3) = 9a+3b+c = 32 \dots \text{③}$$

①、②、③を解く。

$$a = 2 \dots \text{エ}$$

$$b = 3 \dots \text{オ}$$

$$c = 5 \dots \text{カ}$$

$$(iv) x^2 + x - k = 0 \text{ の異なる2つの解を } \alpha, \beta \text{ } (\alpha > \beta) \text{ とすると}$$

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \dots \text{①} \\ \alpha\beta = -k \dots \text{②} \end{cases}$$

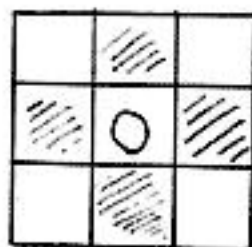
$$\text{与えられた条件より } \alpha - \beta = k \dots \text{③}$$

①、②、③を連立して解く。

$$k = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$\text{ここで } k > 0 \text{ より } k = 2 + \sqrt{5} \dots \text{キ}$$

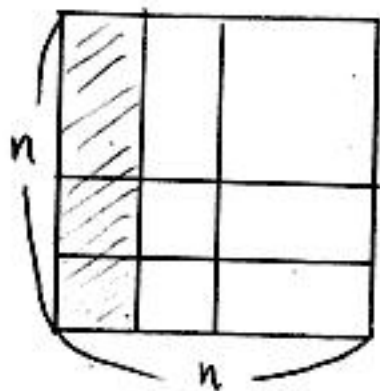
II. (i) 右図のように10目のタイルを
○印のついたタイルを選ぶと、20目
のタイルは斜線のついたタイル



(10目と上下左右隣り合っている)
を選ぶことになる。このような組み合わせは12通り
である。また全組み合わせは ${}^9C_2 = 36$ 通り。

よって $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

(ii) まず右図の斜線部のように縦 n で
横 1 の長方形に關して考えると、
タイルの中心間の距離が 1 になる
組み合わせは $(n-1)$ 通り。



横が n の長さについて考えるので
 $n(n-1)$ 通り。

同様にして縦 1、横 n の長方形に關して考えると
タイルの中心間の距離が 1 になる組み合わせは $(n-1)$ 通り
縦が n の長さについて考えるので $n(n-1)$ 通り。

また全組み合わせは ${}^n C_2 = \frac{n^2(n-1)}{2}$ 通り。

以上より求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1) + n(n-1)}{{}^n C_2} &= \frac{4n(n-1)}{n^2(n-1)(n+1)} \\ &= \frac{4}{n(n+1)} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

III

$0 \leq OP \leq OA$, $0 \leq OQ \leq OB$ より

$0 \leq X \leq L$, $0 \leq Y \leq L$ である.

右図のように, 点P, Qを結ぶ直線と, 点O, Aを通る直線が直交する時にYは最大となり, 点P, Qを結ぶ直線と, 点O, Bを通る直線が直交する時Yは最小となる.

また $\angle AOB = \theta$ より

Yの最大値は $\frac{X}{\cos \theta}$

ただし, $0 \leq Y \leq L$ より $0 \leq \frac{X}{\cos \theta} \leq L$

$\therefore 0 \leq X \leq L \cos \theta (< L)$

$L \cos \theta < X \leq L$ のとき, 常に $Y = L$ である.

Yの最小値は $\frac{X \cdot \cos \theta}{1} (0 \leq X \leq L)$

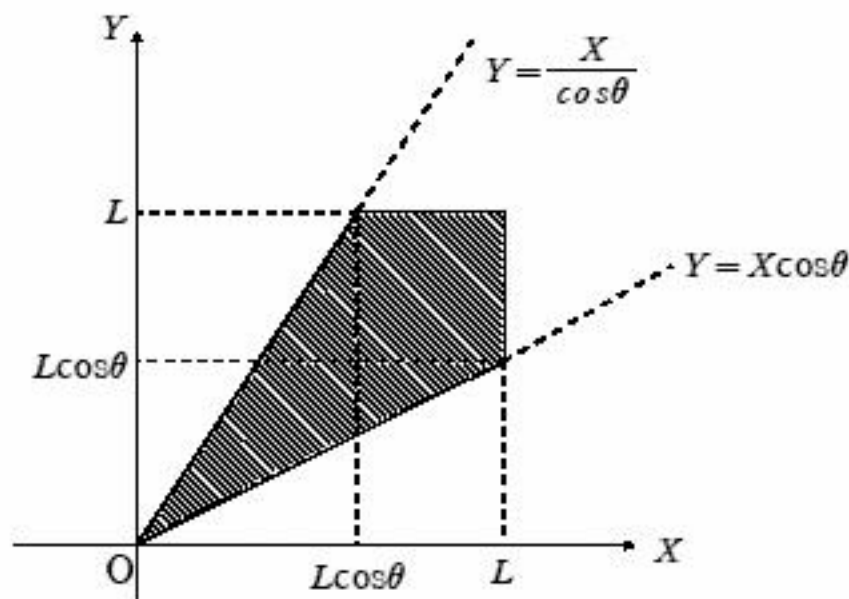
以上より

Yの最大値は $\begin{cases} Y = \frac{X}{\cos \theta} & (0 \leq X \leq L \cos \theta) \\ Y = L & (L \cos \theta < X \leq L) \end{cases}$

Yの最小値は $Y = X \cos \theta (0 \leq X \leq L)$

.....(答)

よって, 点(X, Y)の存在範囲は下図の斜線部分 (境界線を含む) である.



IV (i) (a) $n=2m$ のとき

右図のように P_n, P_{n+1} を通る直線の傾きは -1
 したがって直線は P_n を通るので、切片を C とおくと

$$x_n^2 = -x_n + C \quad \text{という関係式が成り立つ}$$

$\therefore C = x_n^2 + x_n$ より 求める直線の方程式は

$$y = -x + x_n^2 + x_n$$

P_n, P_{n+1} を通る直線の傾きは -1 より $\frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{x_{n+1} - x_n} = -1$

$$x_{n+1} = -x_n - 1$$

(b) $n=2m-1$ のとき

右図のように P_n, P_{n+1} を通る直線の傾きは 1
 あとは (a) と同様に考えて解く

求める直線の方程式は $y = x + x_n^2 - x_n$

x_{n+1} と x_n の関係式は $x_{n+1} = 1 - x_n$

(ii) (i) より $x_{2m+1} = -x_{2m} - 1 \quad \text{--- ①} \quad (n=2m \text{ のとき})$

$x_{2m} = -x_{2m-1} + 1 \quad \text{--- ②} \quad (n=2m-1 \text{ のとき})$

①に②を代入 $x_{2m+1} + 1 = x_{2m-1} - 1$
 $= x_{2m-3} - 3$
 $= x_1 - (2m-1)$

$$x_{2m-1} = -2m + 2 \quad \text{--- ③}$$

③を②に代入 $x_{2m} = 2m - 1$

(iii) (a) $n=2m$ のとき

$$x_{2m+1} = -1 - x_{2m} = -2m$$

$$P_n P_{n+1} = \sqrt{(x_{2m} - x_{2m+1})^2 + (x_{2m}^2 - x_{2m+1}^2)^2}$$

$$= \sqrt{2} (4m - 1)$$

(b) $n=2m-1$ のとき

$$x_{2m} = -x_{2m-1} + 1 = 2m - 1$$

$$P_n P_{n+1} = \sqrt{(x_{2m-1} - x_{2m})^2 + (x_{2m-1}^2 - x_{2m}^2)^2}$$

$$= \sqrt{2} (4m - 3)$$

(iv) (a) $n=2m$ のとき

$$P_n P_{n+1} = \sqrt{2} (4m - 1)$$

$$P_{n+1} P_{n+2} = \sqrt{2} (4m + 1) \quad \text{より}$$

$$S_n = \frac{1}{2} (P_n P_{n+1}) + (P_{n+1} P_{n+2})$$

$$= 16m^2 - 1$$

$m = \frac{n}{2}$ より $S_n = 4n^2 - 1$

(b) $n=2m-1$ のとき

$$P_n P_{n+1} = \sqrt{2} (4m - 3)$$

$$P_{n+1} P_{n+2} = \sqrt{2} (4m - 1) \quad \text{より}$$

$$S_n = \frac{1}{2} (P_n P_{n+1}) + (P_{n+1} P_{n+2})$$

$$= (4m - 3)(4m - 1)$$

$m = \frac{n+1}{2}$ より $S_n = 4n^2 - 1$

以上より

$$n \geq 1 \text{ に対し}$$

$$S_n = 4n^2 - 1$$