

$$I. (i) \quad ax+by+c=0 \Leftrightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \quad \text{--- ①}$$

$y=px+q$ とは y 軸で交わる為、交点の x 座標は 0.

よて ①に $x=0$ を代入、 $y=-\frac{c}{b}=q$

故、 $y=px+q$ とは垂直に交わる為、

$$\left(-\frac{a}{b}\right) \cdot p = -1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot p = 1 \quad \text{よて } p = \frac{b}{a}、$$

$$\text{以上、 } p = \frac{b}{a} \quad q = -\frac{c}{b}$$

$$(ii) \quad \begin{cases} 3^x + 3^y = 108 \\ 3^{x+y} = 3^x \cdot 3^y = 2187 \end{cases} \quad 3^x = X, 3^y = Y \text{ と置く.}$$

$$\begin{cases} X+Y=108 \\ X \cdot Y=2187 \end{cases} \quad \text{ここで、 } Y=108-X \text{ とし、 } XY=2187 \text{ に代入.}$$

$$X \cdot (108-X) = 2187 \Leftrightarrow -X^2 + 108X - 2187 = 0$$

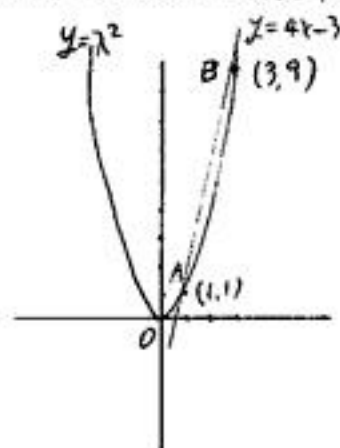
$$X^2 - 108X + 2187 = 0 \quad \text{よて 因数分解をすると、}$$

$$(X-81)(X-27) = 0 \text{ となり、 } X=27, 81 = 3^x$$

$$\text{条件より } x > y \text{ なので、 } 3^x = 81, 3^y = 27 \text{ となり、}$$

$$\therefore \dots x=4 \quad y=3$$

(iii) 求める面積を $S(x)$ とする。左下図より、 $A(1,1), B(3,9)$ を



通る直線の式は、

$$y=4x-3 \text{ となる. よて}$$

$$S(x) = \int_1^3 (4x-3) - x^2 dx$$

$$= \int_1^3 -x^2 + 4x - 3 dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_1^3$$

$$= \left[(-9+18-9) - \left(-\frac{1}{3}+2-3\right) \right]$$

$$= \frac{4}{3} \dots \text{オ}$$

II. (i) $A_{n-1}A_nB_nC_n$ は、 $A_{n-2}A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$ に対し、
面積比が 2:1 より、各辺の長さは $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍となる。

$$\text{よって } \begin{cases} x_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1} \\ y_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \end{cases} \quad \text{となり、}$$

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}\{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}}{\sqrt{2}-1} \\ &= \underline{\underline{(\sqrt{2}+1)\left\{\sqrt{2} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right\}}} = \underline{\underline{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)\left\{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right\}}}, \quad y_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

(ii)

$$B_1(1, 1)$$

$$B_2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{よって求める式を } y = ax + b \text{ とすると、}$$

B_1, B_2 を代入し、

$$\begin{cases} 1 = a + b & \text{--- ①} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a + b & \text{--- ②} \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{①-②より } 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}a \\ &\frac{1}{\sqrt{2}}a = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 1 - \sqrt{2} \quad \text{となり、求める式は } y = (1 - \sqrt{2})x + \sqrt{2}$$

$$(iii) B_n \text{ は、(i)より } (x_n, y_n) = \left(\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)\left\{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right\}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right) \quad \text{--- ①}$$

$$\text{また、(ii)より } B_1, B_2 \text{ を通る式は } y = (1 - \sqrt{2})x + \sqrt{2} \quad \text{--- ②}$$

②に①を代入すると、②の右辺は

$$-\sqrt{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} + \sqrt{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \text{ となり、左辺 } y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \text{ と一致。}$$

よって B_n は直線 $y = (1 - \sqrt{2})x + \sqrt{2}$ 上にある。

Ⅲ. 製品Xの個数を x 、製品Yの個数を y 、売上高の合計を W とすると、

$$W = 200x + 300y \quad \text{--- ①}$$

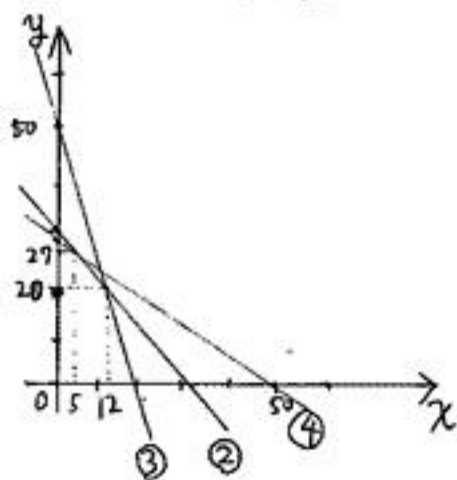
$$32 = x + y \quad \text{--- ②}$$

また、原料aは1000gまで、原料bは1500gまで利用可能な事より

$$\text{原料aについて: } 50x + 20y \leq 1000 \quad \text{--- ③}$$

$$\text{原料bについて: } 30x + 50y \leq 1500 \quad \text{--- ④}$$

②~④を xy 平面上で示すと、下図の様になる。



②と③, ②と④は交点 $(12, 20)$, $(5, 27)$ を持つ。

よって①が $(5, 27)$, $(12, 20)$ を結んだ線分を通り、その中で最大は

$(x, y) = (5, 27)$ のときである。

$$\text{よって } W = 200 \cdot 5 + 300 \cdot 27 = 9100$$

Xが5個, Yが27個のとき,

売上高は最大となり、9100円となる。

IV.

(i) $0 < x < 6$

(ii) $4y + 8x + 4a = 48$

$\therefore y = 12 - 2x - a$

(iii) $y = a$ より、(ii) から $y = 12 - 2x - y \Leftrightarrow 2y = 12 - 2x$
 $y = 6 - x$ となる。

よって求める面積を $V(x)$ とすると、

$$V(x) = x(6-x)^2 = x\{36 - 12x + x^2\}$$

$\therefore V(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$

(iv) (iii) より、 $V(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$ より、 $V(x)$ を x で微分、

$$V'(x) = 3x^2 - 24x + 36$$

$$= 3(x^2 - 8x + 12) = 3(x-6)(x-2)$$

ここで $x = 2, 6$ のとき $V(x)$ は極値を取るが、

(i) より $0 < x < 6$ の為、 $x = 2$ となり、その時 $V(x)$ は

最大値 $V(2) = 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2$

$$= 8 - 48 + 72$$

$$= 32$$

よって $x = 2$ のとき直方体の体積は最大値 32 cm^3 を取る。