

2005年度

G a 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は12ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅳとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 下記の空欄イ～へにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ.

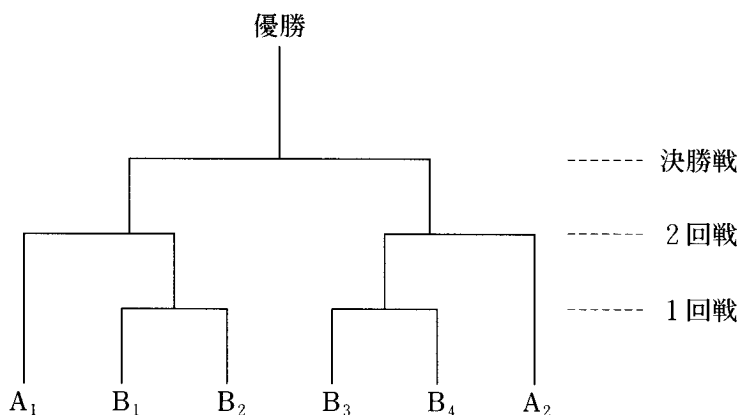
(1) 方程式 $x^2 + x - 1 = 0$ の解を α, β とするとき, $\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3$ の値は イ である.

(2) 行列 $\begin{pmatrix} m & -n \\ n-4 & m-2 \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないような自然数の組 (m, n) は ロ 通り存在する.

(3) 自然数 n に対して, 定積分 $\int_1^e x^{n-1} \log x \, dx$ の値は ハ である.
ただし, e は自然対数の底である.

(4) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(2 \tan \frac{\pi}{n} - \sin \frac{2\pi}{n} \right)$ の値は ニ である.

(5) 6名の選手 $A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, B_4$ が図のような組合せのトーナメント方式で戦う. ただし, 引き分けはなく, どちらか一方のみが勝ち上がるものとする. ここで, A_1, A_2 の実力は対等であり, B_1, B_2, B_3, B_4 の実力も対等であるが, A_i ($i = 1, 2$) と B_j ($j = 1, 2, 3, 4$) の対戦では, A_i が勝つ確率は p ($0 < p < 1$) である. このとき, B_1 が決勝戦に進出する確率は ホ である. また, B_1 が優勝する確率は ヘ である.



Ⅱ. 平面上の3点O, A, Bが $OA = 5$, $OB = 3$, $\angle AOB = \theta$ ($0 < \theta < \pi$) を満たしている. $\angle AOB$ の2等分線上の点Cを $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AC}$ となるようにとる.

(i) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおくとき,

$$\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b} \quad (p, q \text{ は実数})$$

と表すことができる. p, q を θ を用いて表せ.

(ii) $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{BC}$ のとき, $\cos \theta$ を求めよ.

(iii) (ii) のとき, 四角形OACBの面積を求めよ.

Ⅲ. n を自然数として, 関数

$$f_n(x) = \frac{\log x}{x^n} \quad (x > 0)$$

を考える. 0 以上の整数 k に対して $f_n(x)$ の第 k 次導関数 $f_n^{(k)}(x)$ は

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{a(n, k) + b(n, k) \log x}{x^{n+k}} \quad (a(n, k), b(n, k) \text{ は定数})$$

と表すことができる. ただし, $f_n^{(0)}(x) = f_n(x)$ とする.

(i) $a(n, 2), b(n, 2)$ を求めよ.

(ii) $a(n, k+1), b(n, k+1)$ を $n, k, a(n, k), b(n, k)$ を用いて表せ.

(iii) $c(n, k) = \frac{a(n, k)}{b(n, k)}$ とおくと, $c(n, k+1)$ を $n, k, c(n, k)$ を用いて表せ.

(iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} c(n, n)$ を求めよ.

IV. 複素数平面上の点 z に対して, $w = \frac{z}{4z^2 + 1}$ とおく. ただし, $4z^2 + 1 \neq 0$ とする.
 w の虚部が 0 となるような点 z の描く図形を C とする.

(i) C の概形を描け.

(ii) t を正の実数とし, 点 z が C 上を動くときの $|z - \sqrt{t} + i|$ の最小値を $f(t)$ とする. $f(t)$ を求め, t の関数 $s = f(t)$ のグラフの概形を描け. ただし, i は虚数単位である.

【以下余白】

