

I.

ア 6

イ $2a$

ウ 720

エ $-\frac{1}{5}$

オ $\frac{4}{5}$

カ $2 - 2^{1-n}$

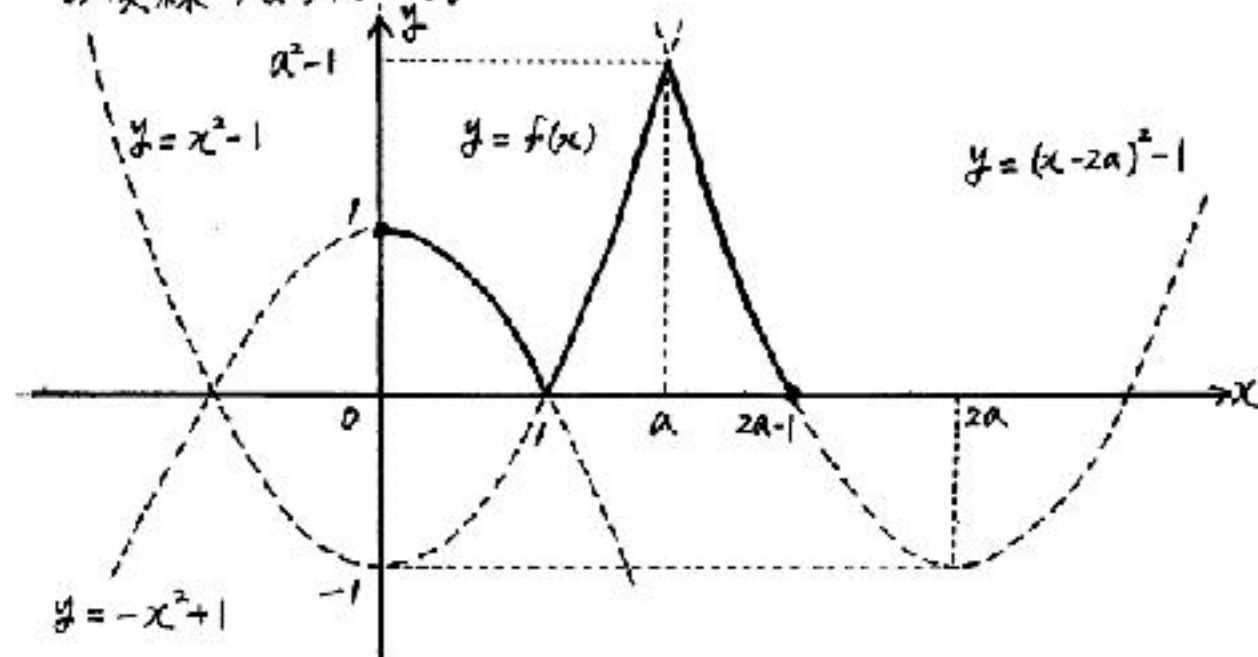
キ $\frac{1}{2} n(n-1)$

II.

$$(i) \quad f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & (0 \leq x < a) \\ x^2 - 4ax + 4a^2 - 1 & (a \leq x \leq 2a-1) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x^2 + 1 & (0 \leq x < 1) \\ x^2 - 1 & (1 \leq x < a) \\ (x - 2a)^2 - 1 & (a \leq x \leq 2a-1) \end{cases}$$

よって $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 2a-1$) のグラフは $a > 1$ より下図の実線のようになる。



(ii) $y = (x-2a)^2 - 1$ のグラフは $y = x^2 - 1$ のグラフを x 軸正方向に $2a$ だけ平行移動したもので、直線 $x = a$ に関して対称である。

したがって、 $S_2 = 2 \int_1^a (x^2 - 1) dx$

$S_1 : S_2 = 1 : 2$ より

$$-S_1 + \frac{1}{2} S_2 = 0 \Leftrightarrow -\int_0^1 -(x^2 - 1) dx + \frac{1}{2} \cdot 2 \int_1^a (x^2 - 1) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^a (x^2 - 1) dx = 0$$

よって、

$$\int_0^a (x^2 - 1) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_0^a = \frac{1}{3} a^3 - a = \frac{1}{3} a(a + \sqrt{3})(a - \sqrt{3}) = 0$$

$a > 1$ より $a = \sqrt{3}$ …… (答)

III.

(i) $g(x) = x^3 + a(x^2 - x) + b$ より

$$g'(x) = 3x^2 + a(2x - 1)$$

$$g'(-2 - \sqrt{6}) = 3(-2 - \sqrt{6})^2 + a\{2(-2 - \sqrt{6}) - 1\} = 0$$

より $a = 6$

このとき $g'(x) = 3x^2 + 6(2x - 1) = 3\{x - (-2 - \sqrt{6})\}\{x - (-2 + \sqrt{6})\}$

$x < -2 - \sqrt{6}$ のとき $g'(x) > 0$, $-2 - \sqrt{6} < x < -2 + \sqrt{6}$ のとき $g'(x) < 0$ より

確かに $x = -2 - \sqrt{6}$ で $y = g(x)$ は極大値をとる。ゆえに $a = 6$ …… (答)

(ii) $a = 6$ より, $g(x) = x^3 + 6x^2 - 6x + b$.

$$g(-2 - \sqrt{6}) = 12\sqrt{6} + 28 + b = 12\sqrt{6} \text{ より } b = -28$$

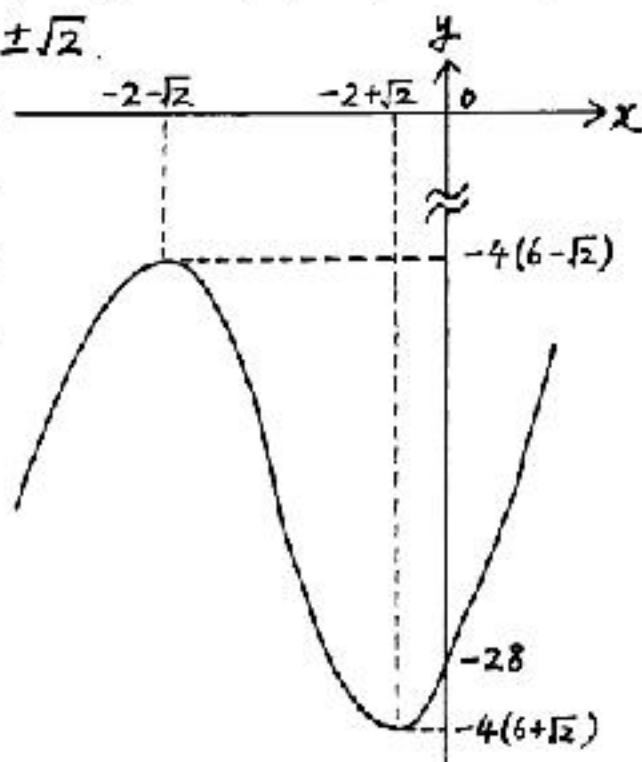
$$f(x) = x^3 + 6(x^2 + x) - 28$$

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 6 = 3\{x - (-2 + \sqrt{2})\}\{x - (-2 - \sqrt{2})\}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = -2 \pm \sqrt{2}.$$

x		$-2 - \sqrt{2}$		$-2 + \sqrt{2}$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$-4(6 - \sqrt{2})$	↘	$-4(6 + \sqrt{2})$	↗

上の増減表より、 $y = f(x)$ のグラフは右図の実線のようになる。



N.

$$(i) \vec{CA} = (-t, 4), \vec{CB} = (-t, 2) \text{ より}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| |\vec{CB}|} = \frac{(-t)(-t) + 4 \cdot 2}{\sqrt{(-t)^2 + 4^2} \sqrt{(-t)^2 + 2^2}} = \frac{t^2 + 8}{\sqrt{t^2 + 16} \sqrt{t^2 + 4}}$$

$\angle ABC > 90^\circ$ より $0^\circ < \theta < 90^\circ$ なので $\tan \theta > 0$.

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ より, } t > 0 \text{ なので}$$

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} = \sqrt{\frac{4t^2}{(t^2 + 8)^2}} = \frac{2t}{t^2 + 8} \dots\dots (\text{答})$$

$$(ii) \frac{1}{\tan \theta} = \frac{t^2 + 8}{2t} = \frac{t}{2} + \frac{4}{t}$$

$\frac{t}{2} > 0, \frac{4}{t} > 0$ より 相加・相乗平均の関係から

$$\frac{1}{\tan \theta} = \frac{t}{2} + \frac{4}{t} \geq 2 \sqrt{\frac{t}{2} \cdot \frac{4}{t}} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{等号成立は } \frac{t}{2} = \frac{4}{t} \Leftrightarrow t^2 = 8 \ (t > 0) \text{ より } t = 2\sqrt{2}$$

よて $\frac{1}{\tan \theta}$ が最小となるときの t の値は $2\sqrt{2} \dots\dots (\text{答})$

$$(iii) CO : OB = 2\sqrt{2} : 2 = \sqrt{2} : 1$$

$$AO : OC = 4 : 2\sqrt{2} = \sqrt{2} : 1$$

より $CO : OB = AO : OC$. また $\angle COB = \angle AOC = 90^\circ$ なので

$$\triangle COB \sim \triangle AOC \therefore \angle OCB = \angle OAC$$

3点 A, B, C を通る円について、 $\angle OCB$ が弧 $\widehat{BC}$ に対する円周角に等しいので、直線 OC は 3点 A, B, C を通る円に接している。(証明終)