

I.

ア	$x \leq 1$ かつ $y < 2$
イ	$xy = 0$ ならば $x = 0$ または $y = 0$
ウ	$2x^2 - x - 1$
エ	$\frac{5}{4}$
オ	4320
カ	20
キ	8000 π
ク	8

II.

$$(i) \begin{cases} y \geq 2(x-2)^2 \\ 2x+3y \leq 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2(x-2)^2 \\ y \leq -\frac{2}{3}x+4 \end{cases}$$

$$y = 2(x-2)^2 \cdots \cdots \textcircled{1} \text{ と}$$

$$y = -\frac{2}{3}x+4 \cdots \cdots \textcircled{2} \text{ の}$$

交点のx座標は

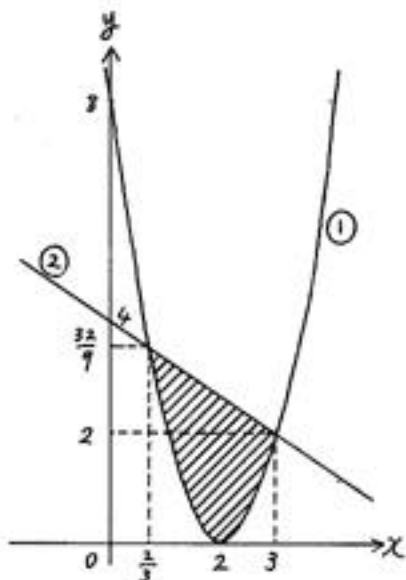
$$2(x-2)^2 = -\frac{2}{3}x+4$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)(x-3)=0 \text{ より}$$

$$x = \frac{2}{3}, 3$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ のとき } \textcircled{2} \text{ より } y = \frac{32}{9}, x = 3 \text{ のとき } \textcircled{2} \text{ より } y = 2$$

よって、①と②の交点は $(\frac{2}{3}, \frac{32}{9})$ と $(3, 2)$ で、領域Dは右上図の斜線部のようになる。ただし境界はすべて含む。



$$(ii) (i) \text{ より } \underline{\underline{\frac{2}{3} \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{32}{9}}} \cdots \cdots (\text{答})$$

$$(iii) x+y = k \text{ とおくと, } y = -x+k \cdots \cdots \textcircled{3} \text{ より}$$

k は直線③のy切片である。③の傾きの方が②の傾きよりも小さいので、k が最大値をとるのは③が点 $(3, 2)$ を通るときで、このとき

$$k = 3+2 = 5$$

k が最小値をとるのは③が①に接するときで

$$2(x-2)^2 = -x+k \Leftrightarrow 2x^2-7x+8-k=0 \text{ の判別式Dについて}$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (8-k) = 0 \text{ より } k = \frac{15}{2}$$

したがって、 $x+y$ の最大値は 5、最小値は $\frac{15}{2}$ $\cdots \cdots (\text{答})$

Ⅲ.

(i) 放物線Cについて $y = x^2 + 2$ より

$y' = 2x$ ゆえに l の方程式は

$$y = 2t(x - t) + t^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow y = 2tx - t^2 + 2$$

l と x 軸との交点の x 座標について

$$2tx - t^2 + 2 = 0 \text{ より } x = \frac{t^2 - 2}{2t} \quad (\because t > 0)$$

l と x 軸との交点を Q 、 P から x 軸

に下した垂線の足を R とすると

$$QR = t - \frac{t^2 - 2}{2t} = \frac{t^2 + 2}{2t}$$

よって

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot QR \cdot PR = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2 + 2}{2t} \cdot (t^2 + 2) = \frac{1}{4} t^3 + t + \frac{1}{t} \dots\dots (\text{答})$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad S_2 &= \frac{1}{2} \int_{-t}^t \{(t^2 + 2) - (x^2 + 2)\} dx \\ &= \frac{-1}{2} \int_{-t}^t (x + t)(x - t) dx \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{6}\right) \{t - (-t)\}^3 \\ &= \frac{2}{3} t^3 \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

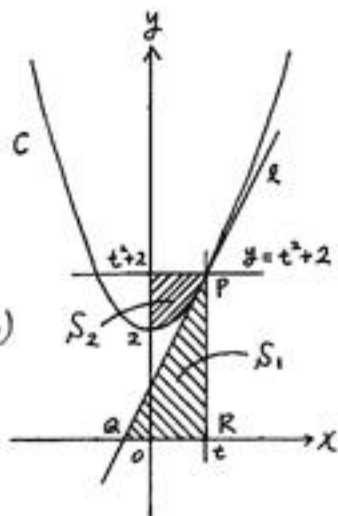
$$\text{(iii)} \quad 8S_1 - 3S_2 = 8\left(\frac{1}{4} t^3 + t + \frac{1}{t}\right) - 3 \cdot \frac{2}{3} t^3 = 8\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

$t > 0$ より、相加・相乗平均の関係から

$$8S_1 - 3S_2 = 8\left(t + \frac{1}{t}\right) \geq 8 \cdot 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 16$$

等号成立は $t = \frac{1}{t}$ ($t > 0$) より $t = 1$ のとき、したがって

$8S_1 - 3S_2$ は $t = 1$ のとき最小値 16 をとる。……(答)



IV.

(i) 原点をOとする。

$$\vec{CA} = \vec{OA} - \vec{OC} = (1, 0, 0) - (0, 0, 2) = (1, 0, -2)$$

$$\vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC} = (0, 1, 0) - (0, 0, 2) = (0, 1, -2)$$

$$|\vec{CA}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}, |\vec{CB}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = |\vec{CA}| |\vec{CB}| \cos \theta \text{ より}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| |\vec{CB}|} = \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{5} \dots\dots (\text{答})$$

(ii) $0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\sin \theta > 0$ なのて

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

よて

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{2} \dots\dots (\text{答})$$

$$(iii) \vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC} = (3, 3, z) - (0, 0, 2) = (3, 3, z-2)$$

$$\vec{CA} \perp \vec{CD} \text{ より } \vec{CA} \cdot \vec{CD} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + (-2)(z-2) = 0$$

$$\therefore z = \frac{7}{2}$$

$$\therefore \text{とき, } \vec{CD} = (3, 3, \frac{7}{2}) - (0, 0, 2) = (3, 3, \frac{3}{2})$$

$$\vec{CB} \cdot \vec{CD} = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + (-2) \cdot \frac{3}{2} = 3 - 3 = 0 \text{ より}$$

$\vec{CB} \perp \vec{CD}$ といえる。(証明終)

(iv) 四面体 ABCD の体積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \Delta ABC \cdot |\vec{CD}| &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3^2 + 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \\ &= \frac{9}{4} \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$