

I.

$$I \quad -8x$$

$$□ \quad \frac{4}{9}$$

$$△ \quad \frac{\pi}{4}$$

$$= \quad \frac{1}{3}$$

$$ホ \quad \frac{9}{2}$$

$$△ \quad \frac{63}{4}$$

## II.

$$(i) \text{ 余弦定理より } \cos\theta = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot AC} = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{7}{8} \dots\dots(\text{答})$$

$$(ii) \quad 0 < \theta < \pi \text{ より } \sin\theta > 0 \text{ なので}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

正弦定理より、外接円の半径を  $R$  とすると

$$R = \frac{AB}{2\sin\theta} = \frac{2}{2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{8}} = \frac{8\sqrt{15}}{15} \dots\dots(\text{答})$$

$$(iii) \quad AB \text{ と } OP \text{ の交点を } Q \text{ とおくと点 } Q \text{ は } AB \text{ の中点なので、 } \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

三点  $P, Q, O$  は同一直線上にあるので、 $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OQ} = \frac{k}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$  ( $k > 0$ ) とおける。

$$R^2 = |\overrightarrow{OP}|^2 = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{k^2}{4}(|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + 2 \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}) \quad \text{であり、}$$

円周角の定理から  $\angle AOB = 2\angle ACB = 2\theta$  また  $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = R$  なので

$$R^2 = \frac{k^2}{4}(R^2 + R^2 + 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 2\theta) \iff 1 = \frac{k^2}{2}(1 + \cos 2\theta) \iff 1 = k^2 \cos^2 \theta$$

$$\therefore k = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = \frac{8}{7}$$

$$\text{したがって、} \overrightarrow{OP} = \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{4}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{OB} \quad \text{より}$$

$$a = b = \frac{4}{7} \dots\dots(\text{答})$$

### Ⅲ.

$$(i) \quad f(x) = e^x g(x) - \int_0^x e^t f(x-t) dt \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①に  $f(x) = x^n e^x$  を代入して

$$x^n e^x = e^x g(x) - \int_0^x (x-t)^n e^x dt$$

両辺に  $\frac{1}{e^x} (> 0)$  をかけて式変形すると

$$\begin{aligned} g(x) &= x^n + \int_0^x (x-t)^n dt \\ &= x^n + \left[ \frac{-1}{n+1} (x-t)^{n+1} \right]_0^x \\ &= x^n + \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

(ii)  $t' = x - t$  とおくと

$$\begin{aligned} \int_0^x e^t f(x-t) dt &= - \int_x^0 e^{x-t'} f(t') dt' \\ &= \int_0^x e^{x-t} f(t) dt \\ &= e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt \end{aligned}$$

したがって①は

$$f(x) = e^x g(x) - e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt$$

両辺に  $e^{-x}$  をかけて

$$e^{-x} \cdot f(x) = g(x) - \int_0^x e^{-t} f(t) dt$$

両辺を  $x$  で微分すると,  $\frac{d}{dx} \int_0^x e^{-t} f(t) dt = e^{-x} f(x)$  だから

$$-e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = g'(x) - e^{-x} f(x)$$

よって

$$f'(x) = e^x g'(x) \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(iii)  $g(x) = x^2$  より

(ii)の  $f'(x)$  の式に代入すると

$$f'(x) = 2xe^x$$

なので

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \int xe^x dx \\ &= 2 \int (e^x)' x dx \\ &= 2e^x x - 2 \int e^x dx \\ &= 2e^x x - 2e^x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

$$f(0) = g(0) = 0 \text{ より } C = 2$$

したがって

$$f(x) = 2e^x x - 2e^x + 2 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$