

I.

$$I \quad -8x$$

$$□ \quad \frac{4}{9}$$

$$△ \quad \frac{\pi}{4}$$

$$= \quad \frac{1}{3}$$

$$☆ \quad \frac{9}{2}$$

$$> \quad \frac{63}{4}$$

II.

$$(i) \text{ 余弦定理より } \cos \theta = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot AC} = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{7}{8} \dots\dots(\text{答})$$

(ii) $0 < \theta < \pi$ より $\sin \theta > 0$ なので

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

正弦定理より、外接円の半径を R とすると

$$R = \frac{AB}{2 \sin \theta} = \frac{2}{2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{8}} = \frac{8\sqrt{15}}{15} \dots\dots(\text{答})$$

(iii) AB と OP の交点を Q とおくと点 Q は AB の中点なので、 $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

三点 P, Q, O は同一直線上にあるので、 $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OQ} = \frac{k}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ ($k > 0$) とおける。

$$R^2 = |\overrightarrow{OP}|^2 = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{k^2}{4} \left(|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + 2 \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \right) \text{ であり、}$$

円周角の定理から $\angle AOB = 2\angle ACB = 2\theta$ また $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = R$ なので

$$R^2 = \frac{k^2}{4} (R^2 + R^2 + 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 2\theta) \Leftrightarrow 1 = \frac{k^2}{2} (1 + \cos 2\theta) \Leftrightarrow 1 = k^2 \cos^2 \theta$$

$$\therefore k = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = \frac{8}{7}$$

したがって、 $\overrightarrow{OP} = \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{4}{7} \overrightarrow{OA} + \frac{4}{7} \overrightarrow{OB}$ より

$$a = b = \frac{4}{7} \dots\dots(\text{答})$$

Ⅲ.

$$(i) \quad f(x) = e^x g(x) - \int_0^x e^t f(x-t) dt \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①に $f(x) = x^n e^x$ を代入して

$$x^n e^x = e^x g(x) - \int_0^x (x-t)^n e^x dt$$

両辺に $\frac{1}{e^x} (> 0)$ をかけて式変形すると

$$\begin{aligned} g(x) &= x^n + \int_0^x (x-t)^n dt \\ &= x^n + \left[\frac{-1}{n+1} (x-t)^{n+1} \right]_0^x \\ &= x^n + \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

(ii) $t' = x - t$ とおくと

$$\begin{aligned} \int_0^x e^t f(x-t) dt &= - \int_x^0 e^{x-t} f(t) dt \\ &= \int_0^x e^{x-t} f(t) dt \\ &= e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt \end{aligned}$$

したがって①は

$$f(x) = e^x g(x) - e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt$$

両辺に e^{-x} をかけて

$$e^{-x} \cdot f(x) = g(x) - \int_0^x e^{-t} f(t) dt$$

両辺を x で微分すると, $\frac{d}{dx} \int_0^x e^{-t} f(t) dt = e^{-x} f(x)$ だから

$$-e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = g'(x) - e^{-x} f(x)$$

よって

$$f'(x) = e^x g'(x) \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(iii) $g(x) = x^2$ より

(ii)の $f'(x)$ の式に代入すると

$$f'(x) = 2xe^x$$

なので

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \int xe^x dx \\ &= 2 \int (e^x)' x dx \\ &= 2e^x x - 2 \int e^x dx \\ &= 2e^x x - 2e^x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

$$f(0) = g(0) = 0 \text{ より } C = 2$$

したがって

$$f(x) = 2e^x x - 2e^x + 2 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

IV.

(i) 半直線 $OP_1: y = x (x \geq 0)$ 上に点 Q_1 があるので

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{かつ} \quad y = x (x \geq 0) \quad \text{より}$$

$$x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって、 Q_1 の座標は $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (答)

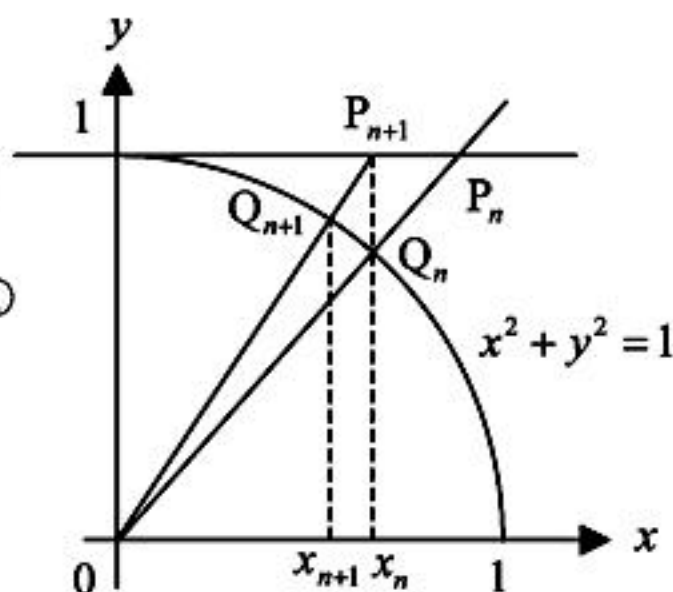
(ii) 半直線 OP_{n+1} の式は

$$y = \frac{1}{x_n} x (x \geq 0)$$

上式と、 $x^2 + y^2 = 1$ より、 Q_{n+1} の x 座標について

$$x_{n+1}^2 + \left(\frac{1}{x_n}\right)^2 x_{n+1}^2 = 1 \quad \therefore x_{n+1}^2 = \frac{x_n^2}{x_n^2 + 1} \quad \text{.....①}$$

$$x_{n+1} \geq 0 \text{ より、} x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2}{x_n^2 + 1}} \quad \text{.....(答)}$$



(iii) ①式より

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} = 1 + \frac{1}{x_n^2}$$

よって、数列 $\left\{\frac{1}{x_n^2}\right\}$ は初項: $\frac{1}{x_1^2} = 2$ 、項差 1 の等差数列なので、

$$\frac{1}{x_n^2} = 2 + (n-1) \cdot 1 = n+1 \quad \therefore x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad (\because x_n > 0)$$

Q_n の y 座標を y_n とおくと、 $x_n^2 + y_n^2 = 1$ より

$$y_n^2 = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \quad \therefore y_n = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \quad (\because y_n > 0)$$

したがって、 Q_n の座標は

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right) \quad \text{.....(答)}$$