

I

ア $1 < x < 5$

イ 2

ウ $\frac{10}{3}$

エ $\frac{y}{x}$

オ 2

カ -7

キ 8

ク $\frac{23}{27}$

II

- (i) p, q, r, s, t それぞれに対し、A 駅から F 駅までの 6 通りの降り方がある。
よって、求めるべき場合の数は、

$$6^5 (= 7776) \text{ 通り} \cdots \cdots (\text{答})$$

- (ii) A 駅から F 駅までの 6 つの駅のうちから 5 つの駅を選び出し、それを p, q, r, s, t がそれぞれ下りる順番に並べる場合の数は、

$${}_6P_5 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \text{ (通り)}$$

よって、求めるべき確率は、

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6^5} = \frac{5}{54} \cdots \cdots (\text{答})$$

- (iii) 事象 A : いずれかの駅で 5 人のうちの 2 人以上が同時に降車する。

事象 B : 5 人全員がそれぞれ異なる駅で降車する。

とすると、事象 B は事象 A の余事象である。

よって、求めるべき確率は、

$$1 - \frac{5}{54} = \frac{49}{54} \cdots \cdots (\text{答})$$

Ⅲ

- (i) 最上行に横に並んでいる自然数の左から第 15 番目の数は、縦 15 マス横 15 マスの正形状に並んだマスの数に等しいので、

$$15^2 = 225 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

- (ii) 最左列に縦に並んでいる自然数の上から第 15 番目の数は、最上行に横に並んでいる自然数の左から第 14 番目の数に 1 を加えた数に等しいので、(i)と同様の考え方により、

$$14^2 + 1 = 197 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

- (iii) 上から第 m 行目で左から第 m 列目にある自然数は以下の値になる。

$$m^2 - m + 1 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

【証明】

最上行に横に並んでいる自然数の左から第 m 番目の数は、縦 m マス横 m マスの正形状に並んだマスの数に等しいので、 m^2 になる。第 m 列目の第 1 行目から第 m 行目までについて、問題で与えられた規則性より、マスの数は行が 1 つ下がるごとに 1 ずつ減少する。したがって、第 m 行目の数は第 1 行目の数より $(m-1)$ だけ数字が小さいことになる。以上のことから、第 m 行目で左から第 m 列目にある自然数は、

$$m^2 - (m-1) = m^2 - m + 1$$

となる。 (証明終)

IV

(i) 放物線 C について、 $y = x^2$ より $y' = 2x$

点 (t, t^2) における接線の傾きは $2t$ なので、接線の方程式は、

$$y = 2t(x - t) + t^2 \iff y = 2tx - t^2 \quad \dots\dots(\text{答})$$

(ii) 点 P を通る放物線 C の接線を (i) の式で表すことにすると、点 $(s, -1)$ を通るので、

$$-1 = 2ts - t^2 \iff t^2 - 2st - 1 = 0 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

この①式の判別式 D について

$$\frac{D}{4} = (-s)^2 - 1 \cdot (-1) = s^2 + 1 > 0$$

よって、 t に関する二次方程式①は異なる 2 つの実数解を持つ。

ゆえに、放物線 C の接線で点 P を通るものはちょうど 2 本だけ存在する (証明終)

(iii) t に関する二次方程式①の解は

$$t = s \pm \sqrt{s^2 + 1}$$

よって、 Q の x 座標は $s - \sqrt{s^2 + 1}$ 、 R の x 座標は $s + \sqrt{s^2 + 1}$ ……(答)

(iv) $(s \pm \sqrt{s^2 + 1})^2 = 2s^2 + 1 \pm 2s\sqrt{s^2 + 1}$ より Q と R の座標は

$$Q(s - \sqrt{s^2 + 1}, 2s^2 + 1 - 2s\sqrt{s^2 + 1}), R(s + \sqrt{s^2 + 1}, 2s^2 + 1 + 2s\sqrt{s^2 + 1})$$

直線 QR の傾きは

$$\frac{(2s^2 + 1 + 2s\sqrt{s^2 + 1}) - (2s^2 + 1 - 2s\sqrt{s^2 + 1})}{(s + \sqrt{s^2 + 1}) - (s - \sqrt{s^2 + 1})} = 2s$$

したがって、直線 QR の方程式は

$$y = 2s\{x - (s - \sqrt{s^2 + 1})\} + 2s^2 + 1 - 2s\sqrt{s^2 + 1} \iff y = 2sx + 1$$

任意の s に対し、上式で $x = 0$ とすると $y = 1$ となる。

よって、求めるべき定点の座標は、 $(0, 1)$ ……(答)