

2006年度

P 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべて**HBの黒鉛筆**または**HBの黒のシャープペンシル**で記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は**8ページ**までとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号は**I～IV**となっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、出席票の受験番号が、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し、出席票の氏名欄に**氏名**のみを記入してください。なお、出席票は切り離さないでください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を折り曲げたり、破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 次の空欄ア～キに当てはまる数または式を記入せよ。解答は解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) $a = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$, $b = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ のとき, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ を簡単にすると ア になる。

(ii) $x^2 - 2ax + 1 = 0$ ($a > 1$) の2つの解を α , β とし, $A = \alpha^{\frac{1}{3}} + \beta^{\frac{1}{3}}$ としたとき, $A^3 - 3A$ を a の式で表すと イ である。

(iii) $z = 2 + xi$ としたとき, $z^{10} \bar{z}^{10}$ を x について展開すると, x^{16} の係数は ウ である。
ただし, x は実数, i は虚数単位, $\bar{z}$ は z と共役な複素数とする。

(iv) 座標平面上の3つのベクトル $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (4, 2)$, $\vec{c} = (-1, 3)$ を考える。 $\vec{c}$ と垂直で長さ $\sqrt{10}$, 2つの成分がともに正であるベクトルを $\vec{d}$ とする。
ベクトル $\vec{d}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表すと, $\vec{d} =$ エ $\vec{a} +$ オ $\vec{b}$ である。

(v) 公比2, 初項1の等比数列 $\{a_n\}$ に対し, 和 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}$ を求めると カ であり, 和 $\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \cdots + \log_2 a_n$ を求めると キ である。

Ⅱ. $a > 1$ として, x の関数 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 2a - 1$) を次のように定める.

$$y = f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & (0 \leq x < a \text{ のとき}) \\ x^2 - 4ax + 4a^2 - 1 & (a \leq x \leq 2a - 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, 次の問 (i), (ii) に答えよ. 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) $y = f(x)$ のグラフを描け.

(ii) $y = f(x)$ のグラフの $0 \leq x \leq 1$ の部分, x 軸, y 軸で囲まれる図形の面積を S_1 とし, $y = f(x)$ のグラフの $1 \leq x \leq 2a - 1$ の部分と x 軸とで囲まれる図形の面積を S_2 とする. $S_1 : S_2 = 1 : 2$ となるとき, a の値を求めよ.

Ⅲ. A君は $y = f(x) = x^3 + a(x^2 + x) + b$ のグラフを描こうとする際、 x の1次の項の係数の符号を間違えて $y = g(x) = x^3 + a(x^2 - x) + b$ として計算してしまった。その結果 $g(x)$ は $x = -2 - \sqrt{6}$ で極大となり、そのときの極大値は $12\sqrt{6}$ であった。ただし、 a, b は実数とする。このとき、次の問(i), (ii)に答えよ。解答は解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) a の値を求めよ。

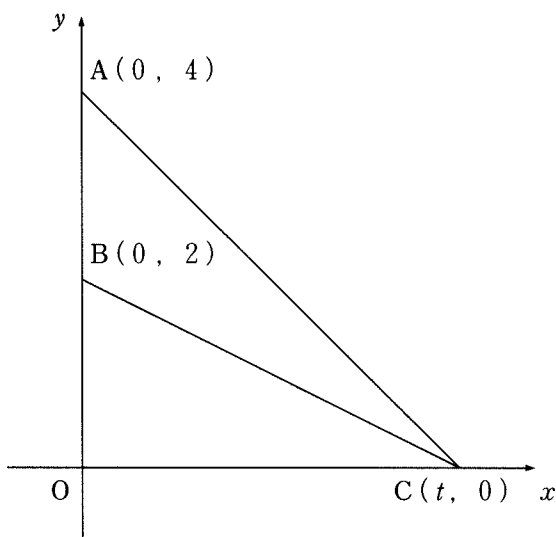
(ii) $y = f(x)$ のグラフを描け。

Ⅳ. t を任意の正の実数とし、下図のように座標平面上に 3 点 $A(0, 4)$, $B(0, 2)$, $C(t, 0)$ をとる. このとき、次の問 (i) ~ (iii) に答えよ. 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) $\angle ACB = \theta$ とおくと、 $\tan \theta$ を t で表せ.

(ii) x 軸上の正の範囲で点 C を動かして、 $\frac{1}{\tan \theta}$ が最小となるときの t を求めよ.

(iii) (ii) のとき、3 点 A , B , C を通る円は、 x 軸に接していることを示せ.



【以下余白】

