

I

ア	3
イ	4
ウ	970
エ	$-\frac{4\sqrt{2}}{9}$
オ	$\frac{343}{660}$
カ	$\frac{4}{3}$

II

(i)

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \text{より}$$

$$|\overrightarrow{AG}| = \sqrt{\frac{1}{9}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{9}|\overrightarrow{AC}|^2}$$

$$\text{ここで, } |\overrightarrow{AB}| = 3, |\overrightarrow{AC}| = 4, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \cdot 4 \cdot \cos 90^\circ = 0 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AG}| &= \sqrt{\frac{1}{9} \cdot 9 + \frac{2}{9} \cdot 0 + \frac{1}{9} \cdot 16} \\ &= \sqrt{\frac{25}{9}} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\underline{\text{(答)} \quad \frac{5}{3}}$$

(ii)

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\text{ここで, } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = \frac{15}{2}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 4 \cdot 5 \cdot \cos 90^\circ = 0 \text{ より}$$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{5}{2}$$

$$\underline{\text{(答)} \quad \frac{5}{2}}$$

(iii)

$$\overrightarrow{AP} \text{は実数 } k \text{ を用いて } \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AG} + k\overrightarrow{GD} \text{ とできる。}$$

$$\text{ここで, } |\overrightarrow{AG}| = \frac{5}{3} \text{ だから、}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{GD}|^2 &= |\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AG}|^2 \\ &= |\overrightarrow{AD}|^2 - 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG} + |\overrightarrow{AG}|^2 \\ &= 25 - 5 + \frac{25}{9} \\ &= \frac{205}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GD} &= \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AD} - |\overrightarrow{AG}|^2 \\ &= \frac{5}{2} - \frac{25}{9} \\ &= -\frac{5}{18} \text{ より} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AP}|^2 &= |\overrightarrow{AG}|^2 + 2k\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GD} + k^2|\overrightarrow{GD}|^2 \\ &= \frac{25}{9} - \frac{5}{9}k + \frac{205}{9}k^2 \\ &= \frac{5}{9}(41k^2 - k + 5) \\ &= \frac{5}{9}\left\{41\left(k - \frac{1}{82}\right)^2 - \frac{1}{164} + 5\right\} \\ &= \frac{205}{9}\left(k - \frac{1}{82}\right)^2 + \frac{455}{164} \end{aligned}$$

$$\text{よって } |\overrightarrow{AP}| \text{ は } k = \frac{1}{82} \text{ のとき最小値をとり、その値は } \underline{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{455}{41}}} \text{ (答)}$$

III

(i)

$$a_n = b_n - f(n)$$

$$a_{n+1} = b_{n+1} - f(n+1)$$

$f(x)$ は 2 次式なので、実数 a, b, c を用いて $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおき、これらを $a_{n+1} = 2a_n + (n+1)(n-2)$ に代入すると、

$$b_{n+1} - a(n+1)^2 - b(n+1) - c = 2b_n - 2an^2 - 2bn - 2c + (n+1)(n-2)$$

ここで、 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列より、

$$-a(n+1)^2 - b(n+1) - c = -2an^2 - 2bn - 2c + (n+1)(n-2) \text{ が成り立つ。}$$

ここから、

$$a(n^2 + 2n + 1) + b(n+1) + c = 2an^2 + 2bn + 2c - (n^2 - n - 2)$$

$$an^2 + (2a + b)n + (a + b + c) = (2a - 1)n^2 + (2b + 1)n + (2c + 2)$$

これが n について恒等式だから $a = 2a - 1, 2a + b = 2b + 1, a + b + c = 2c + 2$

これらから、 $a = 1, b = 1, c = 0$

よって、(答) $f(x) = x^2 + x$

(ii)

$$b_1 = a_1 + f(1)$$

$$= 1 + 1 + 1$$

$$= 3$$

$\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列だから、 $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

よって、 $a_n = b_n - f(n) = \underline{3 \cdot 2^{n-1} - n^2 - n}$ (答)

(iii)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} 3 \cdot 2^{k-1} - \sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k \\ &= \frac{3(2^{10} - 1)}{2 - 1} - \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 \\ &= 3069 - 385 - 55 \\ &= \underline{2629} \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

IV

(i)

接点の x 座標を t とする。

i) $t \geq 3, 0 \geq t$ のとき

$y' = 2x - 3$ より, $2t - 3 = 1$, すなわち $t = 2$ 。

しかしこれは $t \geq 3, 0 \geq t$ を満たさず不適。

ii) $0 < t < 3$ のとき

$y' = -2x + 3$ より, $-2t + 3 = 1$, すなわち $t = 1$ 。

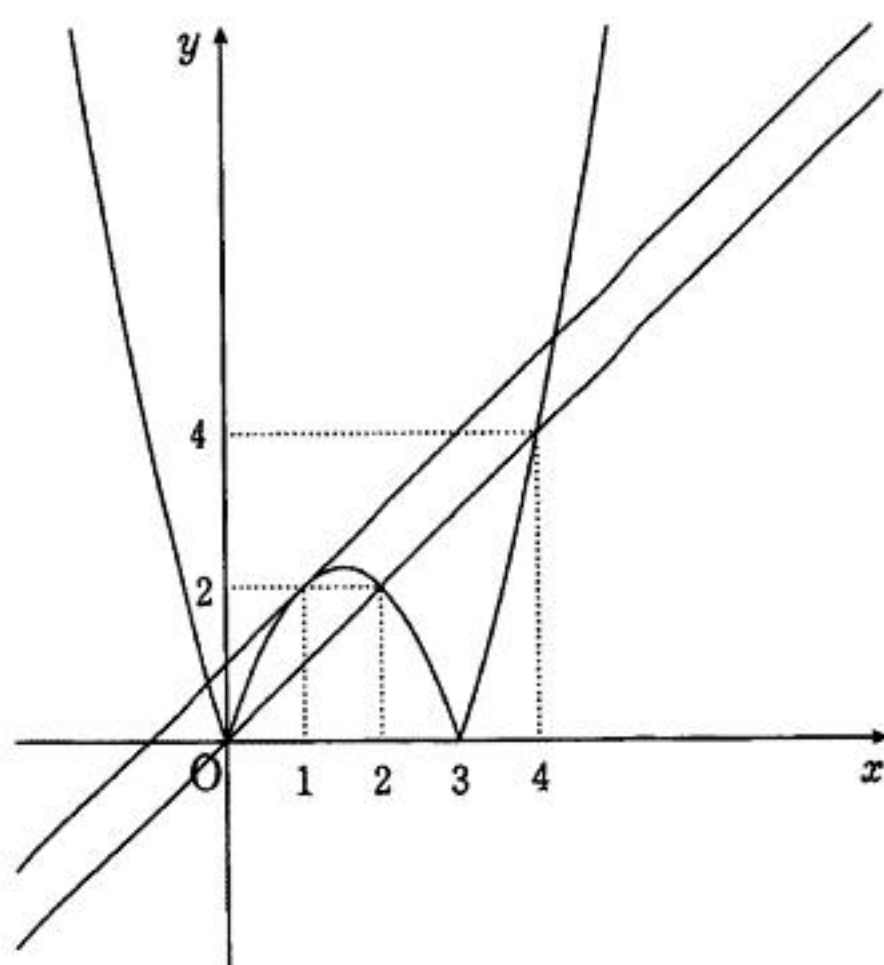
このとき, l は点 $(1, 2)$ で C に接する。

l は点 $(1, 2)$ を通るので, $2 = 1 + a$, すなわち $a = 1$

i), ii) より, (答) $a = 1$

(ii)

グラフは下図のとおり。



点 $(0, 0)$ を通るとき, すなわち $a = 0$ から, $a = 1$ の状態までの間なので,

(答) $0 < a < 1$

(iii)

$y = -x^2 + 3x$ ($0 < x < 3$) と $y = x$ との交点は点 $(0, 0)$ と点 $(2, 2)$

$y = x^2 - 3x$ ($x \geq 3, 0 \geq x$) と $y = x$ との交点は点 $(4, 4)$ 。

よって, 求める面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 (-x^2 + 3x) - x dx + \int_2^3 x - (-x^2 + 3x) dx + \int_3^4 x - (x^2 - 3x) dx \\ &= \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx + \int_3^4 (-x^2 + 4x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_2^3 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_3^4 \\ &= \frac{-26 + 39}{3} \\ &= \frac{13}{3} \end{aligned}$$

(答) $\frac{13}{3}$