

I

ア	5
イ	1
ウ	10
エ	6
オ	4 3

II

(i)

$$\int_0^1 f(t) dt = a \text{ とおく.}$$

$$f(t) = -t^2 + 6at \text{ となる.}$$

$$\begin{aligned} a &= \int_0^1 f(t) dt \\ &= \int_0^1 (-t^2 + 6at) dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3 + 3at^2 \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{3} + 3a \end{aligned}$$

$$2a = \frac{1}{3}$$

$$a = \frac{1}{6}$$

$$\text{よって, (答) } \underline{f(x) = -x^2 + x}$$

(ii)

交点を求めると,

$$-x^2 + x = mx$$

$$x^2 + x(m-1) = 0$$

$$x\{x - (1-m)\} = 0$$

$$(x, y) = (1-m, m-m^2), (0, 0)$$

ここで, 交点は $x > 0$ かつ $y > 0$ だから,

$$1-m > 0 \text{ かつ } 0 < m < 1$$

$$\Leftrightarrow m < 1 \text{ かつ } 0 < m < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < m < 1$$

$$\text{よって, (答) } \underline{0 < m < 1, A \text{ の座標は } (1-m, m-m^2)}$$

(iii)

B(1, 0), C(1-m, 0) である.

$f(x)$ と 2 つの線分で囲まれる図形の面積を S , $\triangle OAC$ の面積を T とする.

$$\begin{aligned} S &= \int_{1-m}^1 (-x^2 + x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{1-m}^1 \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(1-m)^3 - \frac{1}{2}(1-m)^2 \\ &= \frac{1}{6}(-2m^3 + 3m^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(1-m)(-m^2 + m) \\ &= \frac{1}{2}(m^3 - 2m^2 + m) \end{aligned}$$

条件より $S:T = 4:3$ だから,

$$\begin{aligned} S:T &= 4:3 \\ \frac{1}{6}(-2m^3 + 3m^2) : \frac{1}{2}(m^3 - 2m^2 + m) &= 4:3 \\ -2m^3 + 3m^2 &= 4m^3 - 8m^2 + 4m \\ m(6m^2 - 11m + 4) &= 0 \\ m &= \frac{4}{3}, \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$0 < m < 1$ だから,

$$\text{(答) } \underline{m = \frac{1}{2}}$$

III

(i)

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より, } 0 < \sin \theta < 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$g(t) \geq 0 \text{ より}$$

$$t \sin \theta - \frac{1}{2} t^2 \geq 0$$

$$t(t - 2 \sin \theta) \leq 0$$

$$\textcircled{1} \text{ より, (答) } \underline{0 \leq t \leq 2 \sin \theta}$$

(ii)

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より, } 0 < \cos \theta \text{ だから}$$

(i) の答えの両辺に $\cos \theta$ を掛けて,

$$0 \leq t \cos \theta \leq 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq f(t) \leq \sin 2\theta$$

$$\text{よって, (答) } \underline{L = \sin 2\theta}$$

$$\begin{aligned} \text{また, } g(t) &= t \sin \theta - \frac{1}{2} t^2 \\ &= -\frac{1}{2} (t - \sin \theta)^2 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

(i) より,

$$\text{(答) } \underline{t = \sin \theta \text{ のとき, } H = \frac{1}{2} \sin^2 \theta}$$

(iii)

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より, } 0 < 2\theta < \pi. \text{ よって, } 0 < \sin 2\theta \leq 1$$

$$\sin 2\theta = 1 \text{ のとき, } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ であるから,}$$

$$\text{(答) } \underline{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

IV

(i)

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC}| &= |\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}| \\ &= \sqrt{|\overrightarrow{BC}|^2 - 2 \cdot \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + |\overrightarrow{BA}|^2} \\ &= \sqrt{|\overrightarrow{BC}|^2 - 2 \cdot 2 + 2^2} \\ &= \sqrt{|\overrightarrow{BC}|^2} \\ &= |\overrightarrow{BC}| \end{aligned}$$

つまり, $\triangle ABC$ は $BC = AC$ の二等辺三角形.

ここで, C から AB におろした垂線の足を E とする.

このとき二等辺三角形の性質より, $AE = BE = 1$, $CE \perp AB$ である.

$\angle DBA = \angle ECB$, $\angle BDA = \angle BEC$ より, $\triangle ABD \sim \triangle CBE$ である.

$BC = x$ とおくと, $BE : BD = BC : BA$

$$\Leftrightarrow 1 : \frac{2}{9}x = x : 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{9}x^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9$$

$x > 0$ より, $x = 3$.

$BC = AC$ であるから,

(答) $AC = 3$

(ii)

$$\begin{aligned} EC &= \sqrt{BC^2 - BE^2} \\ &= \sqrt{9 - 1} \\ &= 2\sqrt{2} \text{ より,} \end{aligned}$$

$$\triangle ABC = 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{2}$$

(答) $2\sqrt{2}$

(iii)

面積が $2\sqrt{2}$ だから

$$\frac{1}{2}AB \times AC \sin \theta = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \sin \theta = 2\sqrt{2}$$

$$\text{よって, } \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{(答)}$$