

I

(i)

ア	イ	ウ	エ
$2^{-\frac{1}{4}}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$

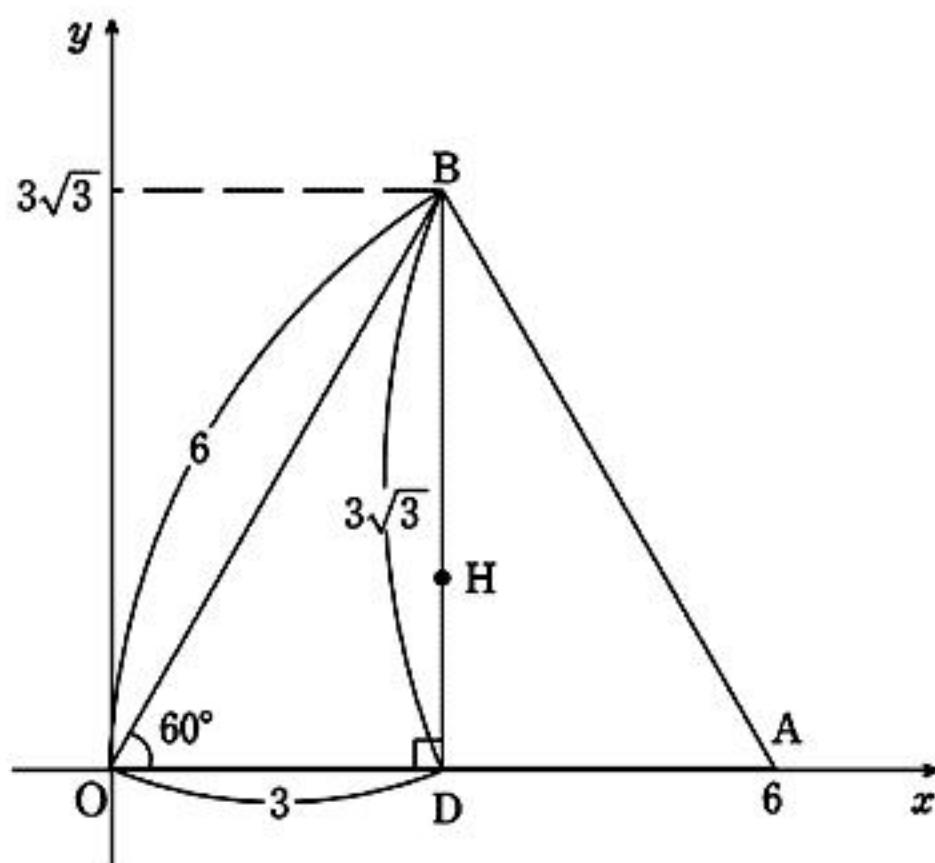
(ii)

(iii)

オ	カ	キ
6	$-\frac{4}{3}x - 10$	3

(iv)

オとカは順不同

 $z=0$ の断面図

- (i) 点Bから x 軸に下ろした垂線の足をDとおき、点Cから xy 平面に下ろした垂線の足をHとおく。四面体OABCが正四面体であることから、点Hは $\triangle OAB$ の重心になるのでBD上にある。

$$\begin{cases} OD = 6 \cos 60^\circ = 3 \\ BD = 6 \sin 60^\circ = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

よりBの座標は $B(3, 3\sqrt{3}, 0)$... (答)

点Hが $\triangle OAB$ の重心であることから

$$\begin{cases} BH = \frac{2}{3} BD = 2\sqrt{3} \\ CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6} \end{cases}$$

よってCの座標は $C(3, \sqrt{3}, 2\sqrt{6})$... (答)

- (ii) 点Pが x 軸上にあることから、点Pの座標を $(k, 0, 0)$ とおく。

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{6} \overrightarrow{OC} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$$

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = (k-3, -3\sqrt{3}, 0)$$

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \left(k - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3} \right)$$

$\angle BPQ = 90^\circ$ より $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{QP} = 0$ なので

$$(k-3) \left(k - \frac{1}{2} \right) + (-3\sqrt{3}) \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \right) + 0 \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{3} \right) = 0$$

すなわち

$$(2k-3)(k-2) = 0$$

$$\therefore k = 2, \frac{3}{2}$$

したがって、求めるべき点Pの座標は

$$(2, 0, 0), \left(\frac{3}{2}, 0, 0 \right) \quad \dots (\text{答})$$

III

- (i) 求めるべき数列を a_m とおくと, 数列 a_m の階差数列が $a_{m+1} - a_m = m$ なので

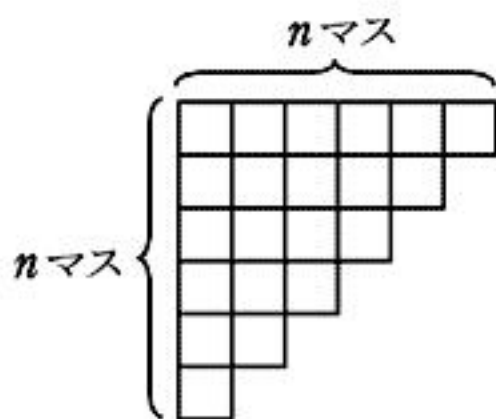
$$a_m = a_1 + \sum_{m=1}^{m-1} m = 1 + \frac{1}{2}m(m-1) = \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m + 1 \quad (m \geq 2)$$

上式は $\frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 = 1$ より $m=1$ でも成立する。したがって,

$$\text{数列 } a_m \text{ の第 } m \text{ 項は } \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m + 1 \quad \dots(\text{答})$$

- (ii) 求めるべき数列を l_n とおくと, l_n は縦と横がそれぞれ n マスある下図のような階段状のマス目の数に等しい。したがって

$$\begin{aligned} l_n &= \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$



- (iii) (ii)より

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}k(k+1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^2 + k) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) \right\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$

IV

$$(i) \quad f(x) = x^3 + x^2 + ax + b$$

より

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + a$$

 $y = f(x)$ が x の 3 次関数で, $y = f'(x)$ が x の 2 次関数なので
「 $y = f(x)$ が極大値と極小値をもつ」 $\Leftrightarrow$ 「 $y = f'(x)$ が正と負の両方の値をとりうる」 $\Leftrightarrow$ 「 $f'(x) = 0$ の判別式 D が正である」

$$\Leftrightarrow \frac{D}{4} = 1^2 - 3 \cdot a > 0$$

すなわち

$$a < \frac{1}{3} \quad \dots(\text{答})$$

(ii) 2 次関数 $y = f'(x)$ のグラフが $-1 < x < 1$ の範囲で x 軸と 2 点で交わるための条件を求めればよい. $y = f'(x)$ のグラフは直線 $x = -\frac{1}{3}$

を軸とするから, 求める条件は

$$(i) \text{ より } a < \frac{1}{3} \quad \dots\text{①}$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + a > 0 \text{ より}$$

$$a > -5 \quad \dots\text{②}$$

$$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + a > 0 \text{ より}$$

$$a > -1 \quad \dots\text{③}$$

① かつ ② かつ ③ より, 求めるべき条件は

$$-1 < a < \frac{1}{3} \quad \dots(\text{答})$$

$$(iii) \quad f'(x_1) = f'\left(-\frac{2}{3}\right) = 0 \text{ より}$$

$$3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + a = 0$$

$$\therefore a = 0 \quad \left((ii) \text{ の条件 } -1 < a < \frac{1}{3} \text{ を満たす} \right) \quad \dots(\text{答})$$

$$f(x_1) = \frac{1}{3} \text{ より}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 0 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + b = \frac{1}{3}$$

$$\therefore b = \frac{5}{27} \quad \dots(\text{答})$$

$$\text{このとき } f(x) = x^3 + x^2 + \frac{5}{27}, \quad f'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x + 2)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = 0, -\frac{2}{3} \text{ したがって } x_2 = 0 \quad \dots(\text{答})$$

これは $-1 < x_2 < 1$ および $x_1 < x_2$ を満たしている。

$$f(x_2) = 0^3 + 0^2 + \frac{5}{27} = \frac{5}{27} \quad \dots(\text{答})$$