I

イ	ロ	ハ	ニ	ホ
-1	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$x\sin x$

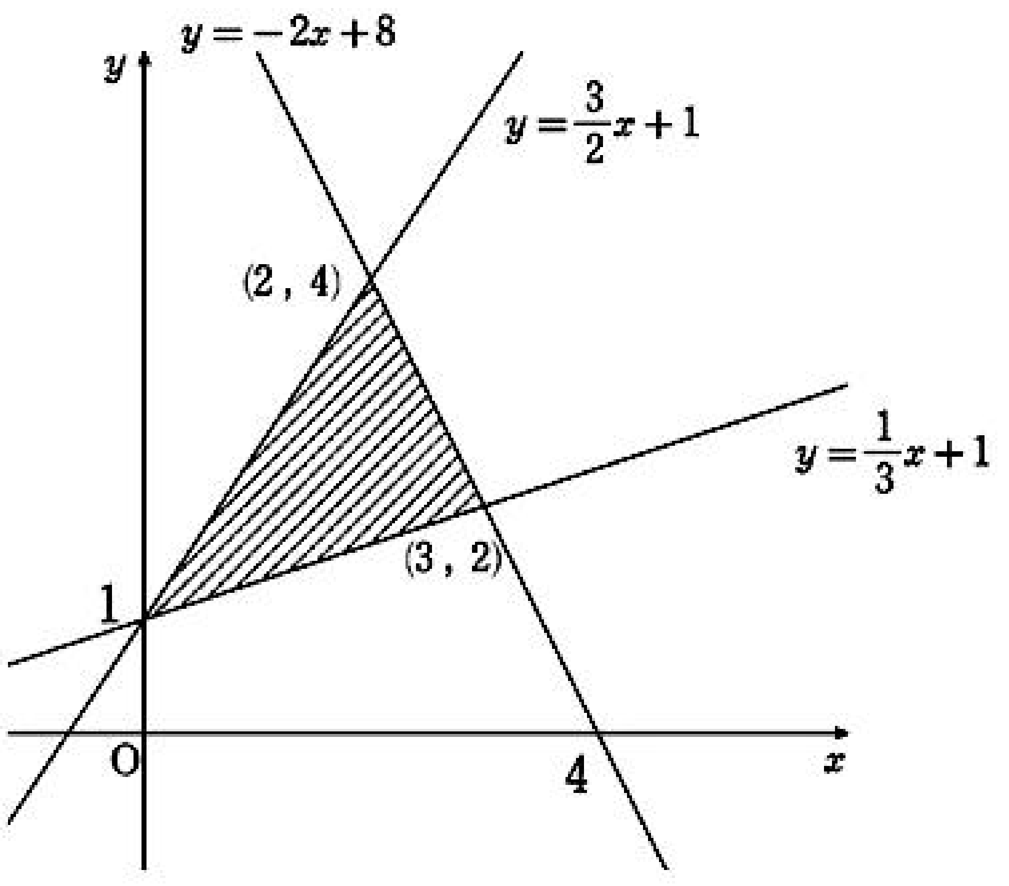
ヘ	ト
$x\sin x\log x+\cos x$	$\frac{5}{8}$

II

(i) $\begin{cases} x-3y+3 \leqq 0 \\ 3x-2y+2 \geqq 0 \\ 2x+y-8 \leqq 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y \geqq \dfrac{1}{3}x+1 \\ y \leqq \dfrac{3}{2}x+1 \\ y \leqq -2x+8 \end{cases}$

よって領域 K は下図の斜線部，ただし境界はすべて含む。



(ii) 3点 A，B，D は同一直線上にあるので

$\overrightarrow{AD}=k\,\overrightarrow{AB}$ とおける。

原点を O とすると，

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=(1,0,1)+k(-1,1,1)=(1-k,k,1+k)$

点 D は xy 平面にあるので $1+k=0$ $\therefore k=-1$

したがって，点 D の座標は D$(2,-1,0)$ …(答)

(iii) 四面体 BCDP は△CDP を底面とすると，

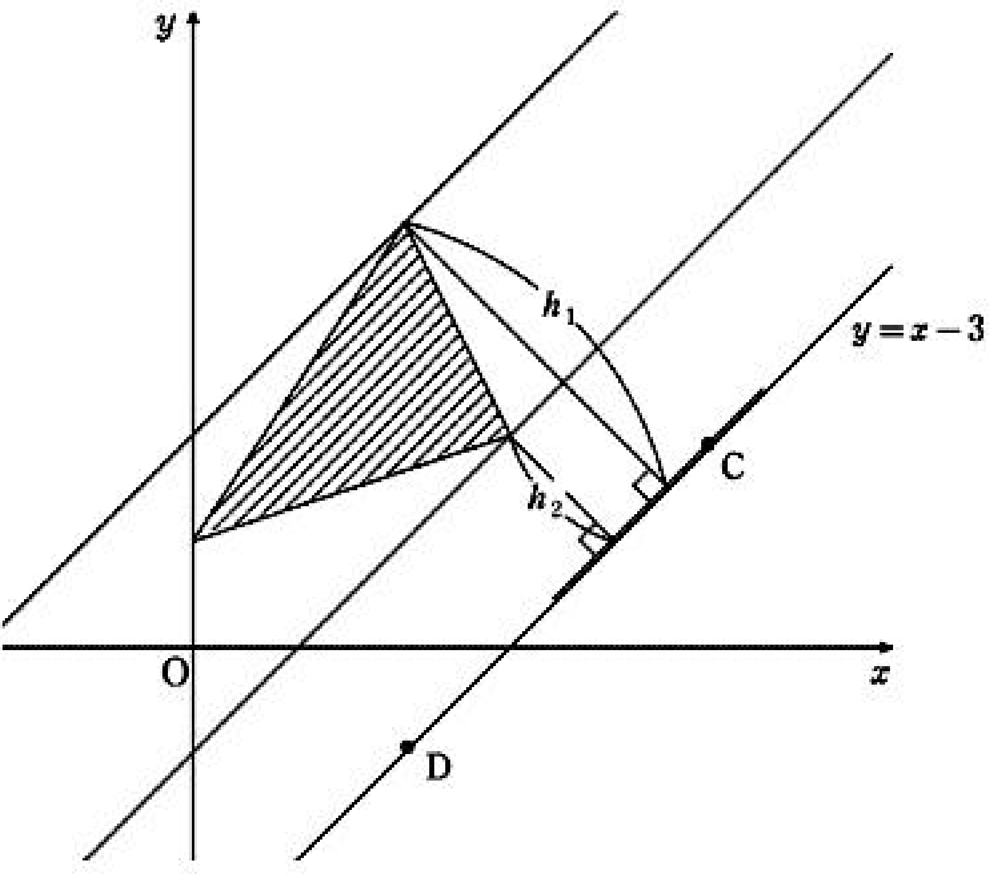
高さは点 B の z 座標より 2 である。

ゆえに， $V_1=\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot 2=\dfrac{2}{3}S$ …(答)

3点 D, A, B は同一直線上にあるので

$V_2=$（四面体 BCDPの体積）−（四面体 ACDPの体積）

$=\dfrac{2}{3}S-\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot 1=\dfrac{1}{3}S$ …(答)



(iv)（iii）より V_2 は S が最大値をとるときに最大となり，

S が最小値をとるときに最小となる。

(a) V_2 が最大となるのは，

点 P が直線 CD から最も離れるときである。

直線 CD の傾きが $\dfrac{2-(-1)}{5-2}=1<\dfrac{3}{2}$ より，

点 P の座標が $(2,4)$ のときで

$$V_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot \mathrm{CD}\cdot h_1=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{3^2+3^2}\cdot\frac{|2-4-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5}{2} \quad \cdots(答)$$

（ただし h_1 は上図で定義した距離）

(b) V_2が最小になるのは，点 P が $(3,2)$ のときで

$$V_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot \mathrm{CD}\cdot h_2=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{3^2+3^2}\cdot\frac{|3-2-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1 \quad \cdots(答)$$

（ただし h_2 は上図で定義した距離）

Ⅲ

（i） $x = r\cos\theta = (2\cos\theta)\cdot\cos\theta = \cos 2\theta + 1$ …①

$y = r\sin\theta = (2\sin\theta)\cdot\cos\theta = \sin 2\theta$ …②

$\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$ と，①，②を合わせて

求めるべき方程式は

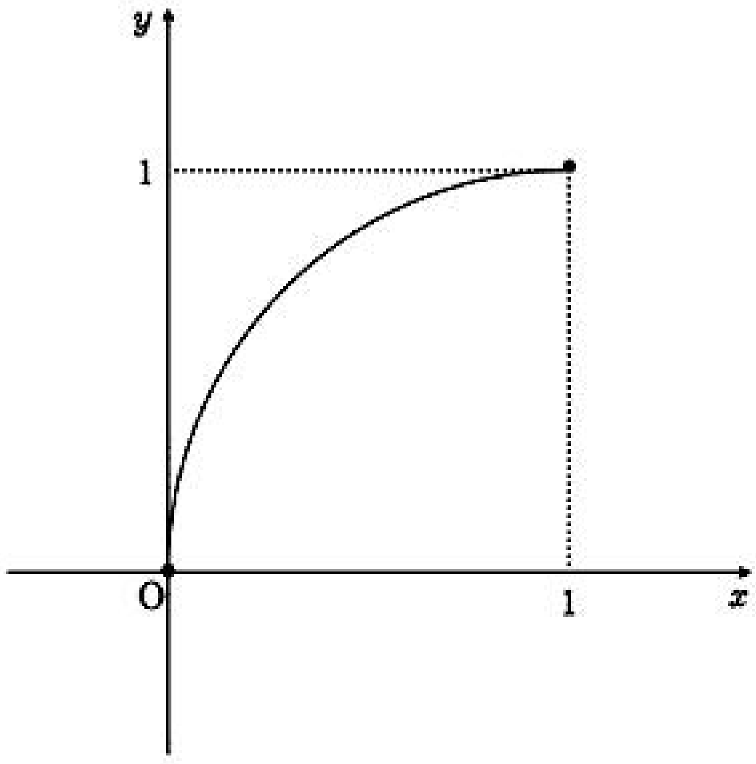
$x^2 + y^2 - 2x = 0$ …③ …(答)

③ $\Longleftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$ より，C_2 は

中心の直交座標が $(1, 0)$，半径 1 の円のうち

$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分なので，概形は下図の実線部分になる。

ただし，端点である $(0, 0)$ と $(1, 1)$ を含む。



（ii） 点 $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ を A とおく。

点 A を通り C_2 と共有点を持つ直線で

傾きが最大となるのは，下図より C_2 と接するとき。

求めるべき直線を $y = k\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$ $(k > 0)$ とおくと

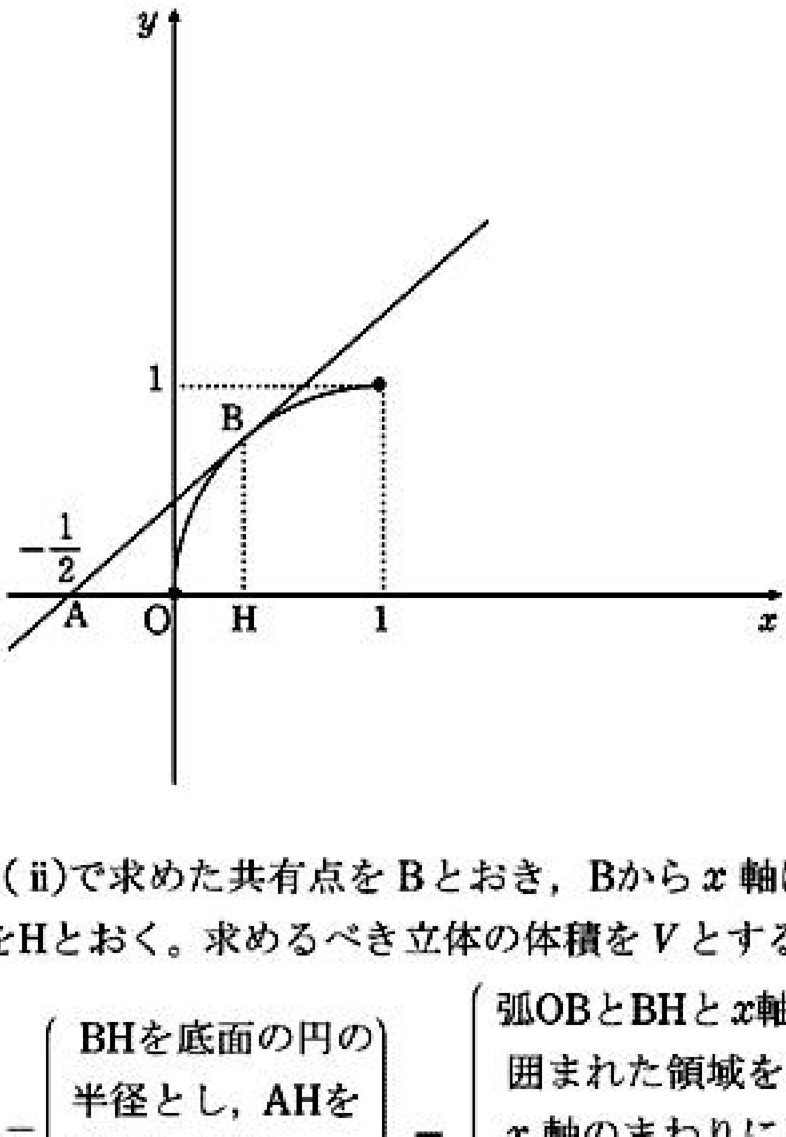
③より，$(k^2+1)x^2 + (k^2-2)x + \dfrac{1}{4}k^2 = 0$ …④

（④の判別式）$= 0$ かつ $k > 0$ より $k = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ …⑤

したがって，求めるべき直線は

$y = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$ …⑥ …(答)

共有点の直交座標は④，⑤，⑥より $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$ …(答)



(iii) (ii)で求めた共有点を B とおき，B から x 軸に下ろした垂線の足を H とおく。求めるべき立体の体積を V とすると，

$V = \left(\begin{array}{l}\text{BHを底面の円の}\\ \text{半径とし，AHを}\\ \text{高さとする}\\ \text{直円錐の体積}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{l}\text{弧OBとBHと}x\text{軸で}\\ \text{囲まれた領域を}\\ x\text{軸のまわりに}\\ \text{回転させてできる}\\ \text{立体の体積}\end{array}\right)$

$= \dfrac{1}{3} \times \pi \cdot \left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 \times \left\{\dfrac{1}{3} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\} - \pi\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \left\{\sqrt{-x^2+2x}\right\}^2 dx$

$= \dfrac{25}{162}\pi - \pi\left[-\dfrac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^{\frac{1}{3}}$

$= \dfrac{1}{18}\pi$ …(答)