

I.

イ	ロ	ハ	ニ	ホ	ヘ	ト
-1	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$x \sin x$	$x \sin x \log x + \cos x$	$\frac{5}{8}$

II.

(i) 求める領域 K は、図1の境界を含む斜線部である。

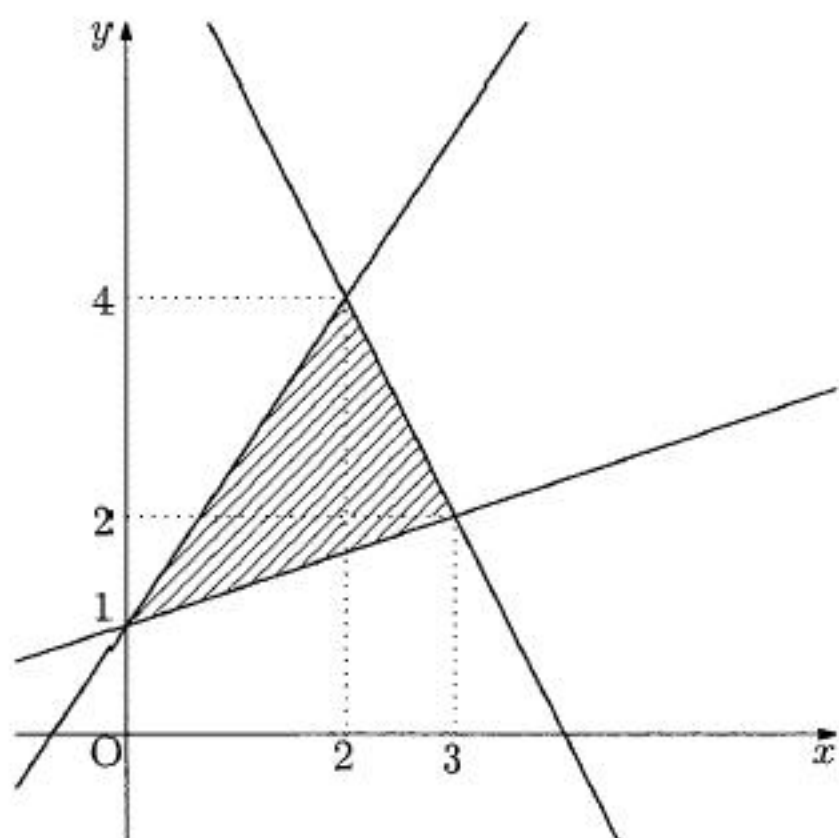


図 1:

(ii) D は直線 AB 上にあるので、

$$\overrightarrow{OD} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB} = (t, 1-t, 2-t)$$

と書ける。 D の z 座標は 0 なので、 $2-t=0$ より、 $t=2$ を得る。よって、 D の座標は $(2, -1, 0)$ である。

(iii) $\triangle CDP$ は xy 平面上にあるので、これを底面と見れば、四面体 $BCDP$ の高さは B の z 座標である 2 となる。従って、 $V_1 = \frac{2}{3}S$ を得る。一方、四面体 $ACDP$ の体積も同様に考えれば $\frac{1}{3}S$ となるから、 V_1 との差をとって、 $V_2 = \frac{1}{3}S$ となる。

(iv) V_2 は S に比例する。従って、 S の最大、最小について考察すれば十分である。図2より、 S が最大となるのは $P(2, 4, 0)$ となるときであり、このとき $S = \frac{15}{2}$ である。また、 S が最小となるのは、 $P(3, 2, 0)$ のときであり、このとき $S = 3$ である。以上より、 V_2 の最大値は $\frac{5}{2}$ であり、最小値は 1 である。

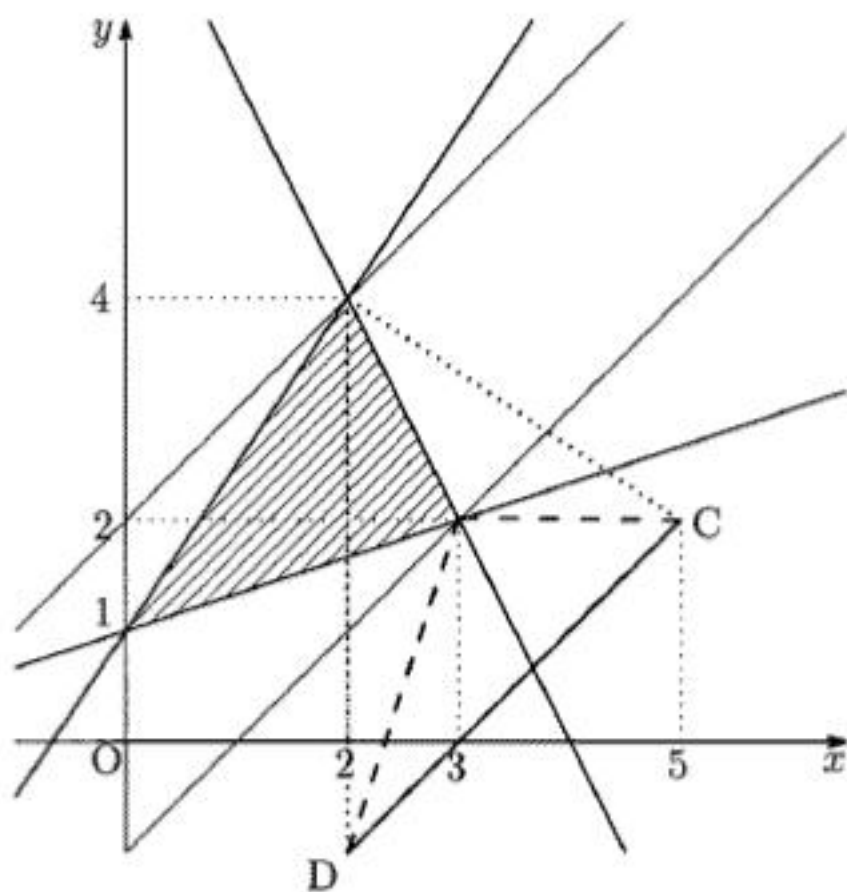


図 2:

III.

(i) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ なので, これを問題の極方程式に代入すれば,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} &= \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ x^2 + y^2 &= 2x \\ (x-1)^2 + y^2 &= 1\end{aligned}$$

となり, これが求める C_1 の方程式である. C_2 はこれを制限したものであるので, 図3の実線部分になる. ただし, 端点を含む.

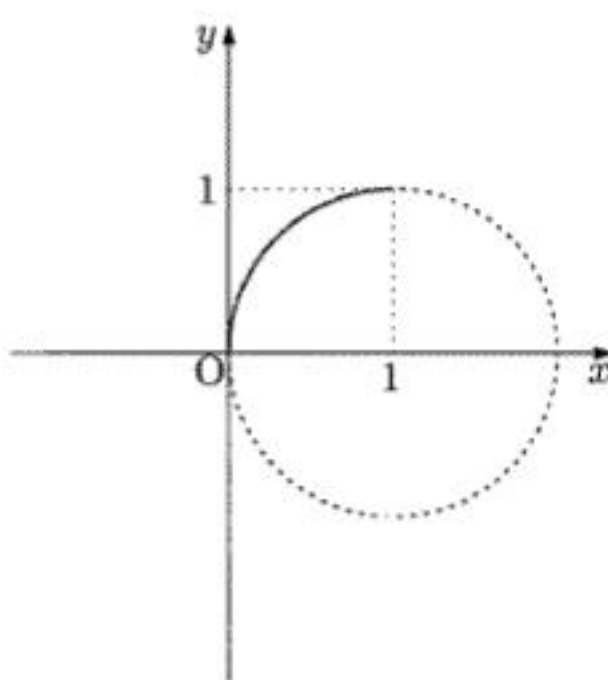


図 3:

(ii) 図4より, 傾きが最大となるのは, C_2 と直線が接するときである. 接点を (x_0, y_0) とおくと, 接線の方程式は $(x_0 - 1)(x - 1) + y_0 y = 1$ と書けるので, これが $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ を通ることから,

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}(x_0 - 1) = 1 \\ (x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 1 \end{cases}$$

という連立方程式が得られる. $x_0 > 0, y_0 > 0$ に注意してこれを解いて, 接点の座標は $\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ となる.

(iii) 図より, 求める体積 V は, 底面が半径 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ の円で, 高さが $\frac{5}{6}$ の円錐から, C_2 と x 軸, そして $x = \frac{1}{3}$ で囲まれる部分を x 軸を中心に回転させた立体の体積を引いて求まる. 従って,

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 \pi \times \frac{5}{6} - \pi \int_0^{1/3} \{1 - (x-1)^2\} dx \\ &= \frac{25}{162} \pi - \pi \left[x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{1/3} \\ &= \frac{25}{162} \pi - \frac{8}{81} \pi \\ &= \frac{1}{18} \pi\end{aligned}$$

である.

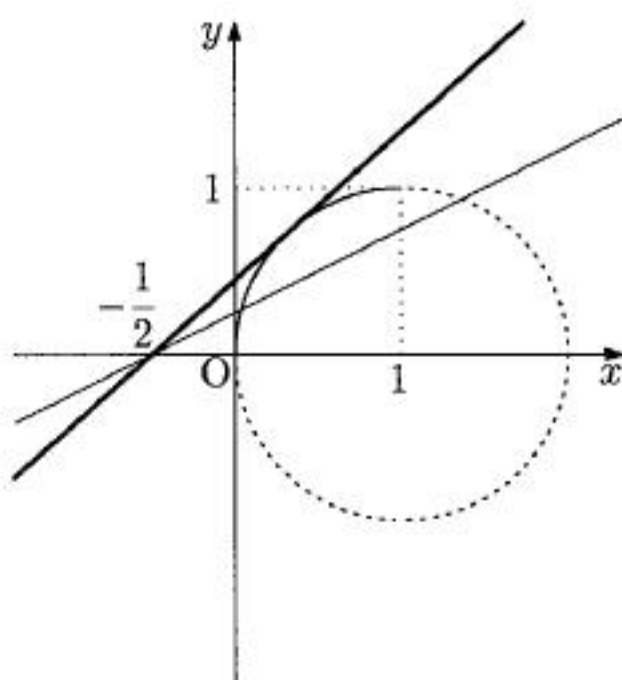


図 4:

IV.

(i)

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \\&= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

(ii) $4 \sin^2 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$ なので, $a = 3$, $b = \sqrt{3} - 1$ である. 故に,
 $a^2 + 2ab + 3b^2 = 9 + 6(\sqrt{3} - 1) + 3(\sqrt{3} - 1)^2 = 15$ を得る.

(iii) $\sqrt{c}$ が有理数になったとすると, $c = (\sqrt{c})^2$ なので, c 自身は有理数の平方になり, これはまた有理数である. しかし仮定から c は無理数なので, 矛盾する. したがって, $\sqrt{c}$ は無理数である. $\sqrt{3}$ は無理数なので, $4 \sin^2 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$ は無理数であるから, その平方根であるところの $2 \sin 75^\circ$ も無理数であり, よって, $\sin 75^\circ$ も無理数である.