

I.

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
8	0	-8	0	1	-1	-4	$\frac{17}{81}$	170	101

II.

(i) 求める領域 D は図 1 の灰色部分になる. ただし, 境界も含む.

(ii) 原点から $2x + y - 8 = 0$ までの距離は,

$$\frac{|2 \cdot 0 + 0 - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

であり, $x + 2y - 6 = 0$ までの距離は,

$$\frac{|0 + 2 \cdot 0 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

である.

(iii) 領域 D の形から, もし OP が最小となるならば, P は D の境界上の点になる.

P が $2x + y - 8 = 0$ 上にある場合, 一番 OP 間の距離が近い点は, $2x + y - 8 = 0$ と $y = \frac{1}{2}x$ の交点である $\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$ であり, この点は確かに D に属する. 一方, P が $x + 2y - 6 = 0$ 上にある場合は, OP が最小となる点は $\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$ であるが, これは D に属さない. よって, 最小になるのは, P が $x + 2y - 6 = 0$ と $2x + y - 8 = 0$ の交点である $\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$ のときであるが, この距離は (2) で求めた $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ よりも大きい.

以上の考察より, OP は $P\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$ のとき最小であり, 最小値は $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ である.

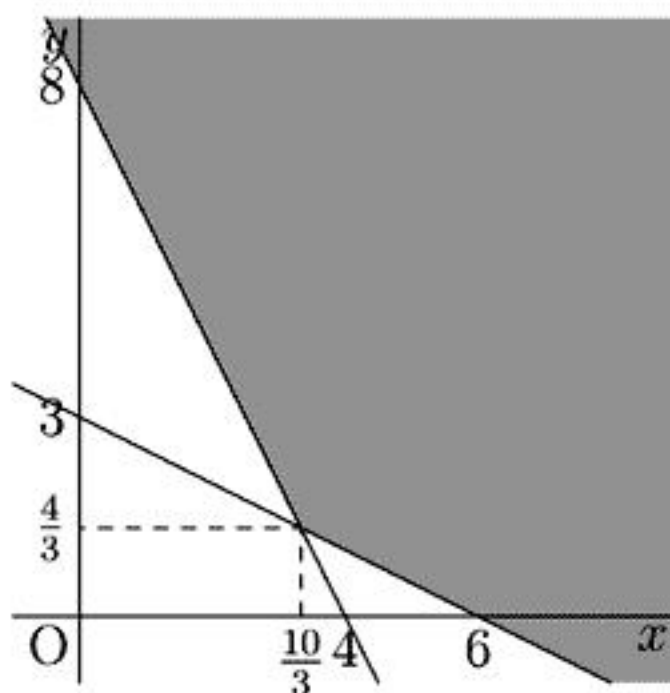


図 1:

III.

(i) 円錐の頂点，球の中心を通り円錐の底面に垂直な平面でこの図形を切断すると，断面の形は図2のようになる． $\triangle AO'B$ と $\triangle APO$ が相似であることから， $h-r:r=\sqrt{1+h^2}:1$ となり， $h=\frac{2r}{1-r^2}$ を得る．

(ii) $V_1=\frac{4}{3}\pi r^3, V_2=\frac{1}{3}\pi h$ なので， $\frac{V_1}{V_2}=\frac{4r^3}{h}=2r^2(1-r^2)$ を得る．

(iii) $f(r)=2r^2(1-r^2)$ とおく． $f'(r)=8r^3-4r$ なので， $f'(r)=0, 0 < r < 1$ となるのは $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$ のときである．よって，増減表は次の通りになる．

r	(0)	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	(1)
$f'(r)$		+	0	-	
$f(r)$		↗		↘	

よって， $\frac{V_1}{V_2}$ は $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最大で，最大値は $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}$ である．

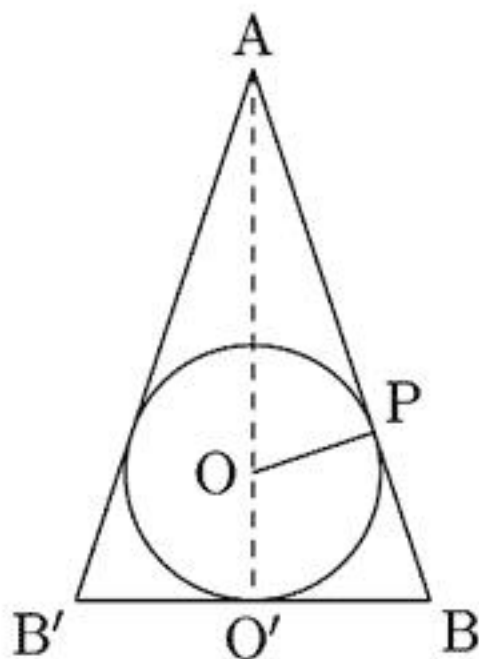


図 2:

IV.

(i) P は AD 上の点なので、 $\overrightarrow{BP} = t\overrightarrow{BD} + (1-t)\overrightarrow{BA} = (1-t)\overrightarrow{x} + \frac{3t}{7}\overrightarrow{y}$ と書ける。一方、P は FC 上の点でもあるので、 $\overrightarrow{BP} = s\overrightarrow{BF} + (1-s)\overrightarrow{BC} = \frac{7s}{11}\overrightarrow{x} + (1-s)\overrightarrow{y}$ でもある。これらを比較して、

$$\begin{cases} 1-t = \frac{7}{11}s \\ \frac{3}{7}t = 1-s \end{cases}$$

という方程式ができる。これを解くと、 $(s, t) = \left(\frac{11}{14}, \frac{1}{2}\right)$ を得る。これを

代入して、 $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{x} + \frac{3}{14}\overrightarrow{y}$ となる。

(ii) $\frac{1}{2} + \frac{3}{14} = \frac{5}{7}$ であるから、 $\frac{7}{5}\overrightarrow{BP} = \frac{7}{10}\overrightarrow{x} + \frac{3}{10}\overrightarrow{y}$ は AC 上にある。故に $\overrightarrow{BE} = \frac{7}{5}\overrightarrow{BP}$ であり、 $BE:BP = 7:5$ である。

(iii) $\overrightarrow{BE} = \frac{7}{10}\overrightarrow{x} + \frac{3}{10}\overrightarrow{y}$ より、 $AE:EC = 3:7$