

2007年度

立教大学理学部
立教大学数学科

N_a 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべて**HBの黒鉛筆**または**HBの黒のシャープペンシル**で記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は**12ページ**までとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号は**I～IV**となっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、出席票の受験番号が、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し、出席票の氏名欄に**氏名**のみを記入してください。なお、出席票は切り離さないでください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を折り曲げたり、破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 下記の空欄イ～トにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ.

(1) 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ に対して, $A^{2007} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく.

$a =$, $b =$ である.

(2) 数列 $\{a_n\}$ が漸化式 $a_{n+1} = \frac{3a_n}{1-5a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たしているとする.

また, 任意の自然数 n に対して, $a_n \neq 0$ とする. n によらない定数 k に対して,

$b_n = \frac{1}{a_n} + k$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって数列 $\{b_n\}$ を定めるとき, $k =$

とすれば $\{b_n\}$ は等比数列となる. さらに, 初項 a_1 が2のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$

である.

(3) 不定積分 $\int (\sin x + x \cos x) dx$ は $+ C_1$ (C_1 は積分定数) である.

このことから, 不定積分 $\int (\sin x + x \cos x) \log x dx$ は $+ C_2$ (C_2 は積分定数) であることがわかる.

(4) A, Bの2人がさいころをそれぞれ2回ずつ振り, Aの1回目, 2回目に出たさいころの目をそれぞれ a_1, a_2 , Bの1回目, 2回目に出たさいころの目をそれぞれ b_1, b_2 とする. $a_1 b_1 + a_2 b_2$ が偶数になる確率は である.

Ⅱ. xyz 座標空間において, 3 点 $A(1, 0, 1)$, $B(0, 1, 2)$, $C(5, 2, 0)$ を考える.
また, 連立不等式

$$x - 3y + 3 \leq 0, \quad 3x - 2y + 2 \geq 0, \quad 2x + y - 8 \leq 0$$

で表される xy 平面上の領域を K とし, 点 P は K 上を動くものとする.

- (i) 領域 K を xy 平面に図示せよ.
- (ii) 2 点 A, B を通る直線と xy 平面との交点 D の座標を求めよ.
- (iii) $\triangle CDP$ の面積を S とする. 四面体 $BCDP$ の体積 V_1 , および四面体 $ABCP$ の体積 V_2 を, S を用いて表せ. ここに, D は (ii) で求めた点である.
- (iv) 点 P が K 上を動くときの, 四面体 $ABCP$ の体積 V_2 の最大値と最小値を求めよ.

Ⅲ. xy 平面上の原点 O を極, x 軸の正の部分の始線とする極座標 (r, θ) において, 極方程式

$$r = 2 \cos \theta$$

で表される曲線 C_1 がある. 曲線 C_1 の $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の部分を C_2 とする.

(i) C_1 を直交座標 (x, y) に関する方程式で表せ. また, xy 平面上に C_2 の概形を描け.

(ii) 直交座標が $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ である点を通り C_2 と共有点を持つ直線のうち, 傾きが最大であるものを求め, そのときの共有点の直交座標を求めよ.

(iii) (ii) で求めた直線を l とする. C_2, l および x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

IV. $\sin 75^\circ$ について, 次の問(i)~(iii)に答えよ.

(i) $\sin 75^\circ$ の値を求めよ.

(ii) $4 \sin^2 75^\circ$ の整数部分を a , 小数部分を b とするとき, $a^2 + 2ab + 3b^2$ の値を求めよ.

(iii) 正の数 c が無理数ならば $\sqrt{c}$ も無理数であることを証明せよ. また, これを用いて $\sin 75^\circ$ は無理数であることを証明せよ. ただし, 必要ならば, $\sqrt{3}$ が無理数であることを用いてよい.

【以下余白】

