

I

ア	$2^n - 1$
イ	-1
ウ	-3
エ	$\frac{2}{27}$
オ	$-2 + \sqrt{5}$
カ	$2\sqrt{3}$
キ	$-\sqrt{3}$

$$(i) \quad y = 2x^2 + ax \\ = x(2x + a)$$

より, 交点は $x = 0, -\frac{a}{2}$ である.

ア) $-\frac{a}{2} > 0 \iff a < 0$ のとき

$$S = \int_0^{-\frac{a}{2}} (-2x^2 - ax) dx \\ = \left[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 \right]_0^{-\frac{a}{2}} \\ = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3}{8} - \frac{a^3}{8} \\ = -\frac{a^3}{24}$$

イ) $-\frac{a}{2} < 0 \iff a > 0$ のとき

$$S = \int_{-\frac{a}{2}}^0 (-2x^2 - ax) dx \\ = \left[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 \right]_{-\frac{a}{2}}^0 \\ = -\frac{2}{3} \cdot \frac{a^3}{8} + \frac{a^3}{8} \\ = \frac{a^3}{24}$$

ア), イ) より

$$S = \frac{|a^3|}{24} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(ii) \quad -x^2 + 4x = 2x^2 + ax \\ -3x^2 + x(4 - a) = 0$$

ここで判別式を D とおけば, 条件は $D = 0$ である.
よって

$$D = (4 - a)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 0 \\ = (4 - a)^2 = 0 \\ a = 4$$

$$a = 4 \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(iii) \quad -x^2 + 4x = 2x^2 + ax \\ x\{3x + (a - 4)\} = 0$$

より, 交点は $x = 0, \frac{4 - a}{3}$ である.

ア) $0 > \frac{4 - a}{3} \iff a > 4$ のとき

$$D = \int_{\frac{4 - a}{3}}^0 (-x^2 + 4x - 2x^2 - ax) dx \\ = \left[-x^3 + \frac{4 - a}{2}x^2 \right]_{\frac{4 - a}{3}}^0 \\ = \frac{(4 - a)^3}{27} - \frac{(4 - a)^3}{18} \\ = -\frac{1}{54}(4 - a)^3$$

このとき, $S = \frac{a^3}{24}$ であるから, 条件より

$$-\frac{1}{54}(4 - a)^3 = \frac{a^3}{24} \times 12 \\ (4 - a)^3 = -27a^3 \\ 4 - a = -3a \\ a = -2$$

$a > 4$ であるので, $a = -2$ は不適.

イ) $0 < \frac{4 - a}{3} \iff a < 4$ のとき

$$D = \int_0^{\frac{4 - a}{3}} (-x^2 + 4x - 2x^2 - ax) dx \\ = \left[-x^3 + \frac{4 - a}{2}x^2 \right]_0^{\frac{4 - a}{3}} \\ = -\frac{(4 - a)^3}{27} + \frac{(4 - a)^3}{18} \\ = \frac{1}{54}(4 - a)^3$$

① $0 < a < 4$ のとき

$$S = \frac{a^3}{24} \text{ であるから, 条件より} \\ \frac{1}{54}(4 - a)^3 = \frac{a^3}{24} \times 12 \\ (4 - a)^3 = 27a^3 \\ 4 - a = 3a \\ a = 1$$

となり, 範囲を満たす.

② $a < 0$ のとき

$$S = -\frac{a^3}{24} \text{ であるから, 条件より} \\ \frac{1}{54}(4 - a)^3 = -\frac{a^3}{24} \times 12 \\ (4 - a)^3 = -27a^3 \\ 4 - a = -3a \\ a = -2$$

となり, 範囲を満たす.

①, ②より $a = 1, -2$

ア), イ) より

$$a = 1, -2 \quad \dots\dots(\text{答})$$

III

(i)

$P(x, y)$ とすると, 条件より

$$(x, y) = (s + 11t, 2s - 2t)$$

である. 今 $x = 4, y = -4$ だから,

$$\begin{cases} s + 11t = 4 & \cdots \textcircled{1} \\ 2s - 2t = -4 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ② より

$$\text{(答)} \quad (s, t) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

(ii)

$\angle AOP = \alpha, \angle BOP = \beta$ とすると, 条件より $\cos \alpha = \cos \beta$ である.

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OP}|}, \quad \cos \beta = \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OB}| \cdot |\overrightarrow{OP}|}$$

であるので, 条件は

$$|\overrightarrow{OB}| \times \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OA}| \times \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \cdots \textcircled{3}$$

となる.

ここで

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{121+4} = 5\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = s + 11t + 4s - 4t = 5s + 7t$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} = 11s + 121t - 4s + 4t = 7s + 125t$$

であるから, それぞれ③ 式に代入して,

$$5\sqrt{5}(5s + 7t) = \sqrt{5}(7s + 125t)$$

$$25s + 35t - 7s - 125t = 0$$

$$s - 5t = 0$$

よって

$$\text{(答)} \quad s = 5t$$

(iii)

P が円 C 上にあるのならば

$$(s + 11t - 2)^2 + (2s - 2t - 2)^2 = 1$$

$$5s^2 + 125t^2 + 14st - 36t - 12s + 7 = 0 \cdots \textcircled{4}$$

が成立する.

また, (ii) の条件 $s = 5t$ を④ 式に代入すると,

$$125t^2 + 125t^2 + 70t^2 - 36t - 60t + 7 = 0$$

$$320t^2 - 96t + 7 = 0 \cdots \textcircled{5}$$

ここで⑤ 式の判別式を D とすると,

$$D = (96)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 320$$

$$= 256$$

$$> 0$$

であるので, (ii) の条件を満たす④ 式の解 (s, t) は 2 組存在する.

また, ある解の組 (s, t) に対して P はただ 1 点定まるので, 円 C 上には (ii) の条件を満たす点が 2 つ存在することが示された.

⑤ 式より

$$t = \frac{96 \pm 16}{2 \cdot 320} = \frac{7}{40}, \frac{1}{8}$$

であるから, $s = 5t$ より s を求めれば, 対応する実数の組 (s, t) は,

$$\text{(答)} \quad (s, t) = \left(\frac{7}{8}, \frac{7}{40}\right), \left(\frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right)$$
