

I

(i)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^4 - 6x^2 \\ &= 3x^2(x^2 - 2) \end{aligned}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pm\sqrt{2}$ である.
また

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12x^3 - 12x \\ &= 12x(x^2 - 1) \end{aligned}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pm 1$ である.
また

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{5}x^5 - 2x^3 \\ &= x^3 \left(\frac{3}{5}x^2 - 2 \right) \end{aligned}$$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pm\frac{\sqrt{30}}{5}$ である.

これらから, 増減表は以下のとおり.

x		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$	
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	0	-	0	+	+	+
$f(x)$	$\curvearrowright$	$\frac{8\sqrt{2}}{5}$	$\curvearrowleft$	$\frac{7}{5}$	$\curvearrowleft$	0	$\curvearrowleft$	$-\frac{7}{5}$	$\curvearrowleft$	$-\frac{8\sqrt{2}}{5}$	$\curvearrowright$

よってグラフは以下のようになる.

II

(i)

$\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3k}\right)$ を行列 A で移した点は, $\left(\frac{5}{3}a + \frac{4b}{3k}, \frac{5}{3}c + \frac{4a}{3k}\right)$

また $\left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3k}\right)$ を行列 A で移した点は $\left(\frac{5}{3}a - \frac{4b}{3k}, \frac{5}{3}c - \frac{4a}{3k}\right)$

これらはともに曲線 C 上に移されるから代入して,

$$\begin{cases} 9k^2a^2 + 40kab + 16b^2 - 25k^4c^2 - 40k^3ac - 9k^2 = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ 9k^2a^2 - 40kab + 16b^2 - 25k^4c^2 + 40k^3ac - 9k^2 = 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成立する.

① + ② より

$$18k^2a^2 + 32b^2 - 50k^4c^2 - 18k^2 = 0 \cdots \textcircled{3}$$

また ① - ② より

$$80ka(b - k^2c) = 0 \cdots \textcircled{4}$$

ここで, $k \neq 0, a \neq 0$ であるので④は

$$b = k^2c \cdots \textcircled{5}$$

と同値.

⑤を両辺2乗したものを③に代入して c を消去すると,

$$\begin{aligned} 18k^2a^2 + 32b^2 - 54b^2 - 18k^2 &= 0 \\ 18b^2 &= 18k^2(a^2 - 1) \\ b &= k\sqrt{a^2 - 1} \quad (\because k > 0, a \geq 1) \end{aligned}$$

またこの結果を⑤に代入して c について解くと,

$$c = \frac{b}{k^2} = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{k}$$

よって (答) $b = k\sqrt{a^2 - 1}, c = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{k}$