

I

ア	$2^n - 1$
イ	-1
ウ	-3
エ	$\frac{2}{27}$
オ	$-2 + \sqrt{5}$
カ	$2\sqrt{3}$
キ	$-\sqrt{3}$

II

(i)

$$\begin{aligned}y &= 2x^2 + ax \\ &= x(2x + a)\end{aligned}$$

より, 交点は $x = 0, -\frac{a}{2}$ である.

ア) $-\frac{a}{2} > 0 \Leftrightarrow a < 0$ のとき

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{-\frac{a}{2}} (-2x^2 - ax) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 \right]_0^{-\frac{a}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3}{8} - \frac{a^3}{8} \\ &= -\frac{a^3}{24}\end{aligned}$$

イ) $-\frac{a}{2} < 0 \Leftrightarrow a > 0$ のとき

$$\begin{aligned}S &= \int_{-\frac{a}{2}}^0 (-2x^2 - ax) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 \right]_{-\frac{a}{2}}^0 \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{a^3}{8} + \frac{a^3}{8} \\ &= \frac{a^3}{24}\end{aligned}$$

ア), イ) より

$$\text{(答)} \quad \underline{S = \frac{|a^3|}{24}}$$

(ii)

$$\begin{aligned}-x^2 + 4x &= 2x^2 + ax \\ -3x^2 + x(4 - a) &= 0\end{aligned}$$

III

(i)

$P(x, y)$ とすると, 条件より

$$(x, y) = (s + 11t, 2s - 2t)$$

である. 今 $x = 4, y = -4$ だから,

$$\begin{cases} s + 11t = 4 & \cdots \textcircled{1} \\ 2s - 2t = -4 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ② より

$$\text{(答)} \quad (s, t) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

(ii)

$\angle AOP = \alpha, \angle BOP = \beta$ とすると, 条件より $\cos \alpha = \cos \beta$ である.

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OP}|}, \quad \cos \beta = \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OB}| \cdot |\overrightarrow{OP}|}$$

であるので, 条件は

$$|\overrightarrow{OB}| \times \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OA}| \times \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \cdots \textcircled{3}$$

となる.

ここで

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{121+4} = 5\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = s + 11t + 4s - 4t = 5s + 7t$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} = 11s + 121t - 4s + 4t = 7s + 125t$$