

ア	$\frac{1}{4}$	イ	0	ウ	4	エ	75
オ	$\frac{2}{3}$	カ	25	キ	$\frac{26}{5}$	ク	2
ケ	2	コ	$2+\sqrt{3}$	サ	$(x+y+1)(x+y)$	シ	4444

(i) 3点 O, A, B が一直線上にあるとき, 実数 k が存在して,

$$\overrightarrow{OA} = k \overrightarrow{OB} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ.

ここで $|\overrightarrow{OA}| = |k| |\overrightarrow{OB}|$ で,

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$$

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{25 \cos^2 5\theta + 25 \sin^2 5\theta} = 5$$

$$\text{よって} \quad |k| = \frac{1}{5}$$

(7) $k = \frac{1}{5}$ のとき

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\iff \begin{cases} \cos \theta = \cos 5\theta \\ \sin \theta = \sin 5\theta \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \cos 5\theta - \cos \theta = 0 \\ \sin 5\theta - \sin \theta = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2 \sin 3\theta \sin 2\theta = 0 \\ 2 \cos 3\theta \sin 2\theta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ に注意して

$$\iff \begin{cases} 3\theta = 2\pi \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

これを同時に満たす θ は存在しない.

(4) $k = -\frac{1}{5}$ のとき

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\iff \begin{cases} \cos \theta = -\cos 5\theta \\ \sin \theta = -\sin 5\theta \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \cos 5\theta + \cos \theta = 0 \\ \sin 5\theta + \sin \theta = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2 \cos 3\theta \cos 2\theta = 0 \\ 2 \sin 3\theta \cos 2\theta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ に注意して

$$\iff \begin{cases} 3\theta = \frac{\pi}{2} \text{ または } 2\theta = \frac{\pi}{2} \\ 3\theta = 2\pi \text{ または } 2\theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

これを同時に満たす θ は

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

以上(7), (4) より求める θ は

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(ii) A, B の座標を用いて

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\cos \theta \times 5 \sin 5\theta - \sin \theta \times 5 \cos 5\theta| \\ &= \frac{5}{2} |\sin 4\theta| \quad \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

(iii) S が最大るとき, (ii) より $|\sin 4\theta|$ が最大となる.

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $0 < 4\theta < 2\pi$ であるので

$$\begin{aligned} |\sin 4\theta| = 1 &\iff 4\theta = \frac{\pi}{2} \text{ または } \frac{3}{2}\pi \\ &\iff \theta = \frac{\pi}{8} \text{ または } \frac{3\pi}{8} \quad \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

(iv) S が最大るとき, $|\sin 4\theta| = 1$ であるので

$$S = \frac{5}{2} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

また, (i) での考察より $|\overrightarrow{OA}| = 1, |\overrightarrow{OB}| = 5$ で,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= (5 \cos 5\theta - \cos \theta)^2 + (5 \sin 5\theta - \sin \theta)^2 \\ &= 25(\cos^2 5\theta + \sin^2 5\theta) + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ &\quad - 10(\cos 5\theta \cos \theta + \sin 5\theta \sin \theta) \\ &= 26 - 10 \cos 4\theta \end{aligned}$$

S が最大るとき, (iii) より

$$4\theta = \frac{\pi}{2} \text{ または } \frac{3}{2}\pi \text{ なので } \cos 4\theta = 0$$

よって, このとき

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{26}$$

以上より S が最大るとき

$$l = 6 + \sqrt{26} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(i) 原点を通る接線を $y = ax$ とおく. これが放物線と接するので, x の 2 次方程式

$$\begin{aligned} x^2 - 2(m-1)x + m^2 &= ax \\ \Leftrightarrow x^2 + (2-2m-a)x + m^2 &= 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が重解を持つ. 判別式を D として

$$\begin{aligned} D &= (2-2m-a)^2 - 4m^2 \\ &= (2-2m-a-2m)(2-2m-a+2m) \\ &= (2-4m-a)(2-a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2-4m \quad \text{または} \quad 2$$

(γ) $a = 2-4m$ のとき

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow x^2 + 2mx + m^2 = 0$$

$$\therefore x = -m$$

このとき $y = ax$

$$= (2-4m)(-m)$$

$$= 4m^2 - 2m$$

(ι) $a = 2$ のとき

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 = 0$$

$$\therefore x = m$$

このとき $y = ax$

$$= 2m$$

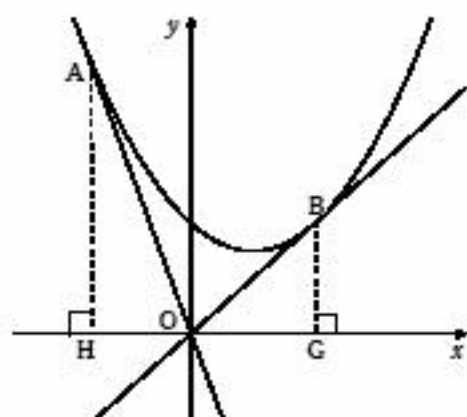
以上と, $-m < m$ であることより

$$A(-m, 4m^2 - 2m), B(m, 2m) \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(ii) 右図より

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-m}^m (x^2 - 2(m-1)x + m^2) dx \\ &= \int_{-m}^m \{(x-m)^2 + 2x\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-m)^3 + x^2 \right]_{-m}^m \\ &= m^2 - \frac{1}{3}(-2m)^3 - (-m)^2 \\ &= \frac{8}{3}m^3 \end{aligned}$$

$\cdots \cdots (\text{答})$



(iii) $S_2 = S_1 - \triangle OAH - \triangle OBG$ を利用する.

$A(-m, 4m^2 - 2m)$ であるので

$$\begin{aligned} \triangle OAH &= \frac{1}{2} OH \cdot HA \\ &= 2m^3 - m^2 \end{aligned}$$

$B(m, 2m)$ であるので

$$\begin{aligned} \triangle OBG &= \frac{1}{2} OG \cdot GB \\ &= m^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{以上より} \quad S_2 &= \frac{8}{3}m^3 - (2m^3 - m^2) - m^2 \\ &= \frac{2}{3}m^3 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{2}{3}m^3}{\frac{8}{3}m^3} = \frac{1}{4} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$