

I

$$(i) \boxed{\text{ア}} (x+2)(x+3)(x+4) \quad (ii) \boxed{\text{イ}} \frac{1}{2} \quad \boxed{\text{ウ}} \frac{3}{2} \quad (iii) \boxed{\text{エ}} \frac{3}{2} \quad \boxed{\text{オ}} \frac{9}{2}$$

$$(iv) \boxed{\text{カ}} 24 \quad (v) \boxed{\text{キ}} 1 \quad \boxed{\text{ク}} -1 \quad (vi) \boxed{\text{ケ}} -2 \quad \boxed{\text{コ}} -1 \quad (vii) \boxed{\text{サ}} \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$(viii) \boxed{\text{シ}} 2 < x \leq 10 \quad (ix) \boxed{\text{ス}} 2 \quad (x) \boxed{\text{セ}} \frac{n}{2n+1}$$

II

(i) $AP:PM=s:(1-s)$ である。このことから、

$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OM} = (1-s)\vec{a} + \frac{4}{7}s\vec{b} \quad \cdots (\text{解})$$

(ii) $LP:PB=t:(1-t)$ であるとする、

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OL} + t\overrightarrow{OB} = \frac{2}{5}(1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

とあらわせる。このことと(i)の結果より、

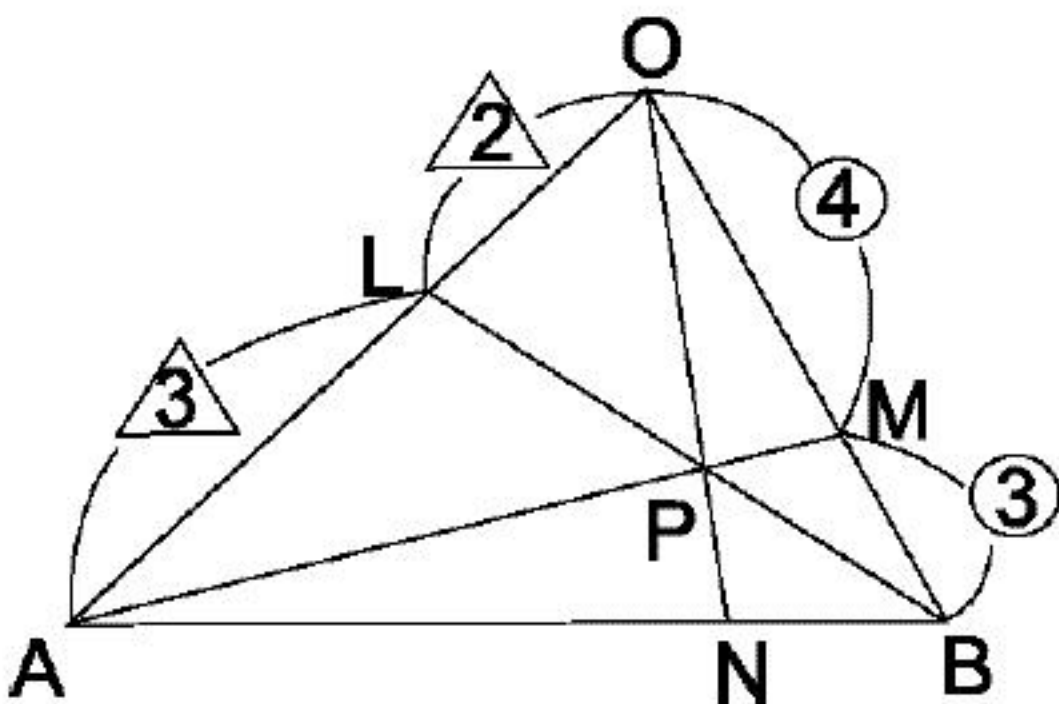
$$1-s = \frac{2}{5}(1-t), \quad \frac{4}{7}s = t \Leftrightarrow s = \frac{7}{9}, t = \frac{4}{9}$$

$$\text{よって、} \overrightarrow{OP} = \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} \quad \cdots (\text{解})$$

(iii) $\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OP} = \frac{2}{9}k\vec{a} + \frac{4}{9}k\vec{b}$ (k は実数)とあらわすことができる。このとき、 N は

AB 上の点であるので、 $\frac{2}{9}k + \frac{4}{9}k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$

このことから、 $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ であるので、 $AN:NB=2:1 \quad \cdots (\text{解})$



III

(i) C_1, C_2 の2式を連立させて、

$$x^2 + k = -x^2 + ax \Leftrightarrow 2x^2 - ax + k = 0 \cdots \textcircled{1}$$

この方程式が重解を持てばよいので、

$$(\text{判別式}) = a^2 - 8k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{8}a^2 \cdots (\text{解})$$

(ii) ①式に(i)の結果を代入して解けば、

$$2x^2 - ax + \frac{1}{8}a^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}a\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}a$$

よってこのことより、Pの座標は

$$P\left(\frac{1}{4}a, \left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \frac{1}{8}a^2\right) = \left(\frac{1}{4}a, \frac{3}{16}a^2\right) \cdots (\text{解})$$

(iii) C_1 について両辺を微分すれば、 $y' = 2x$ である。よって、 l の方程式は、

$$l: y = \frac{1}{2}a\left(x - \frac{1}{4}a\right) + \frac{3}{16}a^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 \cdots (\text{解})$$

(iv) S_1, S_2 をそれぞれ求めると、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\frac{1}{4}a} \left\{ x^2 + \frac{1}{8}a^2 - \left(\frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 \right) \right\} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}a} \left(x - \frac{1}{4}a \right)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{4}a \right)^3 \right]_0^{\frac{1}{4}a} \\ &= \frac{1}{192}a^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^{\frac{1}{4}a} \left\{ \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 - (-x^2 + ax) \right\} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}a} \left(x - \frac{1}{4}a \right)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{4}a \right)^3 \right]_0^{\frac{1}{4}a} \\ &= \frac{1}{192}a^3 \end{aligned}$$

であるので、 $a \neq 0$ から $S_1, S_2 \neq 0$ なこととあわせて、 $\frac{S_1}{S_2} = 1 \cdots (\text{解})$

