

I .

$$(i) \quad \square \quad 72 \quad (ii) \quad \square \quad 1 - \log_e 2 \quad (iii) \quad \square \quad \frac{5}{3} \quad \square \quad \frac{1}{3}$$

$$(iv) \quad \square \quad \frac{1}{2} \quad \square \quad -\frac{1}{2} \quad \square \quad \frac{1}{2} \quad (v) \quad \square \quad 26$$

II.

(i)

$$\overline{OP} = \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \text{ より、} \triangle OPQ \text{ の面積は } \frac{1}{2} |s \cdot t - 1 \cdot 1| = \frac{1}{2} (1 - st) \quad \because st \leq 1$$

$$(\text{答}) \triangle OPQ \text{ の面積は } \frac{1}{2} (1 - st)$$

(ii)

x 軸の正方向と $\overline{OQ}$ のなす角を φ とすると、

$$s \neq 0 \text{ のとき、} \tan(\theta + \varphi) = \frac{\tan \theta + \tan \varphi}{1 - \tan \theta \tan \varphi} \Leftrightarrow \frac{1}{s} = \frac{\tan \theta + t}{1 - t \cdot \tan \theta} \text{ で}$$

$$1 - st = (s + t) \tan \theta \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{1 - st}{s + t} \text{ となる。}$$

$s = 0$ のときもこの値は $\frac{1}{t}$ となり成り立つが、 $s = t = 0$ のときは発散する。

次に(i)の結果から $\frac{1}{2} |\overline{OP}| |\overline{OQ}| \sin \theta = \frac{1}{2} (1 - st)$ で、 $|\overline{OP}| = \sqrt{1 + s^2}$, $|\overline{OQ}| = \sqrt{1 + t^2}$ より、

$$\sin \theta = \frac{1 - st}{\sqrt{(1 + s^2)(1 + t^2)}} \text{ とわかる。さらに、} \cos \theta = \frac{\sin \theta}{\tan \theta} = \frac{s + t}{\sqrt{(1 + s^2)(1 + t^2)}} \text{ となる。}$$

$$(\text{答}) \sin \theta = \frac{1 - st}{\sqrt{(1 + s^2)(1 + t^2)}}, \cos \theta = \frac{s + t}{\sqrt{(1 + s^2)(1 + t^2)}}, \tan \theta = \frac{1 - st}{s + t}$$

(iii)

今明らかに θ は鋭角であり、 $\tan \theta$ は θ に関して単調増加するので、 $\tan \theta$ の大小と θ の大小は一致する。

$$s + t = 1 \text{ のとき、} \tan \theta = 1 - t(1 - t) = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \quad (0 \leq t \leq 1) \text{ なので、}$$

$\tan \theta$ は $t = \frac{1}{2}$ のとき最小値をとり、 $t = 0, 1$ のとき最大値をとる。

以上より、

$$(\text{答}) \theta \text{ を最小にする } s, t \text{ の値は、} (s, t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\theta \text{ を最大にする } s, t \text{ の値は、} (s, t) = (0, 1), (1, 0)$$

III.

(i)

$$f'(x) = \frac{a(x^2+1) - ax \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{a(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2ax(1+x^2)^2 - a(1-x^2) \cdot 2 \cdot 2x(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{2ax(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

$f''(x)=0$ を考えて、 $x=0, \pm\sqrt{3}$ で $f''(x)$ の符号が変化することは明らか。

従って求める C の変曲点は $f(0)=0, f(\pm\sqrt{3})=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}a$ (複号同順) を踏まえて、

$$(\text{答}) (0,0), \left(\pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{4}a\right) \text{ (複号同順)}$$

(ii)

$f'(\sqrt{3})=-\frac{a}{8}$ なので、 $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}a\right)$ における法線の傾きは、 $a>0$ より $\frac{8}{a}$ となる。

従って $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}a\right)$ における法線は $y = \frac{8}{a}(x-\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{4}a = \frac{8}{a}x + \left(\frac{a}{4} - \frac{8}{a}\right)\sqrt{3}$

これが原点を通ることから、 $\frac{a}{4} - \frac{8}{a} = 0 \Leftrightarrow a^2 = 32$ で $a>0$ より $a=4\sqrt{2}$ となる。

$$(\text{答}) a=4\sqrt{2}$$

(iii)

$f(x) = \frac{4\sqrt{2}x}{x^2+1}, y = \sqrt{2}x$ は共に奇関数であることから、求める面積は $x \geq 0$ の部分の面積を2倍したものに等しい。まず l と C の交点の x 座標を求めると、

$$\frac{4\sqrt{2}x}{x^2+1} = \sqrt{2}x \Leftrightarrow \sqrt{2}x(x^2-3) = 0 \quad x \geq 0 \text{ では } x=0, \sqrt{3}$$

$$\text{よって、} S = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{4\sqrt{2}x}{x^2+1} - \sqrt{2}x \right) dx = 2 \left[2\sqrt{2} \log_e(x^2+1) - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 8\sqrt{2} \log_e 2 - 3\sqrt{2}$$

$$(\text{答}) S = 8\sqrt{2} \log_e 2 - 3\sqrt{2}$$

IV.

(i)

$$a_{32} = a_{16} + 1 = (a_8 + 1) + 1 = (a_4 + 1) + 2 = (a_2 + 1) + 3 = (a_1 + 1) + 4 = 6 \quad (\text{答}) \quad a_{32} = 6$$

(ii)

$a_{2^m k} = a_{2^{m-1} k} + 1 = \cdots = a_k + m$ と予想されるため、これを数学的帰納法により示す。

① $m=1$ のとき

$a_{2^1 k} = a_k + 1$ より成立。

② $m=l$ (l は自然数) のときの成立を仮定すると

$a_{2^{l+1} k} = a_{2^l k} + 1 = (a_k + l) + 1 = a_k + (l+1)$ となるため、 $m=l+1$ のときも題意は成立。

以上より、任意の自然数 m に対して、 $a_{2^m k} = a_k + m$ となることが示された。

(証明終)

(iii)

$n = 2^{m_1} + 2^{m_2} = 2^{m_1} (2^{m_2 - m_1} + 1)$ とかけるため、

$m_2 > m_1$ より $2^{m_2 - m_1} + 1$ が 3 以上の奇数になることに注意して(ii)の結果を用いると、

$$a_{2^{m_1}(2^{m_2 - m_1} + 1)} = a_{2^{m_2 - m_1} + 1} + m_1 = a_{2^{m_2 - m_1}} + m_1 + 1 = a_1 + (m_2 - m_1) + m_1 + 1 = m_2 + 2$$

(答) $a_n = m_2 + 2$

(iv)

(ii)(iii)より $n = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_r}$ のとき $a_n = m_r + r$ と予想されるため、これを数学的帰納法により示す。

① $r=1$ のとき

(ii)において $k=1$ とすれば成り立つ。

② $r=l$ (l は自然数) のときの成立を仮定すると

$$a_{2^{m_1}} + \cdots + a_{2^{m_{l+1}}} = a_{2^{m_1}(1 + 2^{m_2 - m_1} + \cdots + 2^{m_{l+1} - m_1})} = a_{1 + 2^{m_2 - m_1} + \cdots + 2^{m_{l+1} - m_1}} + m_1 = a_{2^{m_2 - m_1} + \cdots + 2^{m_{l+1} - m_1}} + m_1 + 1$$

仮定より $\quad = (m_{l+1} - m_1) + l + m_1 + 1 = m_{l+1} + l + 1$

となるため、 $r=l+1$ のときも成立。

以上より任意の自然数 r に対して、 $a_n = m_r + r$ となることが示された。

(答) $a_n = m_r + r$