

[1]

(i) (与不等式)  $\Leftrightarrow e^{nx+1} - e^{nx} - 1 > 0$

(左辺)  $= f(x)$  において,  $f(x) > 0$  を示す.

$$\begin{aligned} f'(x) &= ne^{nx+1} - ne^{nx} \\ &= ne^{nx}(e-1) > 0 \quad (\because e > 2) \end{aligned}$$

よって,  $f(x)$  は単調増加する.

また,  $f(0) = e - 2 > 0 \quad (\because e > 2)$

以上より  $x \geq 0$  で  $f(x) > 0$  が成り立つ.

ゆえに題意は示された. ■

(ii) (ア)  $x < 0$  のとき

$e^{nx} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  であるので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + e^{nx})}{n} = 0 \quad \dots\dots(\text{答})$$

(イ)  $x \geq 0$  のとき

$e^{nx} < 1 + e^{nx} < e^{nx+1} \quad (\because \text{後半の不等号は(i)による})$

が成り立つ. 辺々自然対数をとって

$$\begin{aligned} nx &< \log(1 + e^{nx}) < nx + 1 \\ \Leftrightarrow x &< \frac{\log(1 + e^{nx})}{n} < x + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

ここで,  $n \rightarrow \infty$  とすれば, はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + e^{nx})}{n} = x \quad \dots\dots(\text{答})$$

(iii) 
$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{(e^{2n} + e^{nx})(e^{-2n} + e^{2nx})}{1 + e^{3nx}} \\ &= \frac{(1 + e^{n(x-2)})(1 + e^{n(2x+2)})}{1 + e^{3nx}} \end{aligned}$$

$\therefore \log f_n(x) = \log(1 + e^{n(x-2)}) + \log(1 + e^{n(2x+2)}) - \log(1 + e^{3nx})$

ここで,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + e^{nx})}{n} = h(x)$  とおく.

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log f_n(x)}{n} \\ &= h(x-2) + h(2x+2) - h(3x) \end{aligned}$$

ところで (ii) より  $h(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$

よって, 特に,

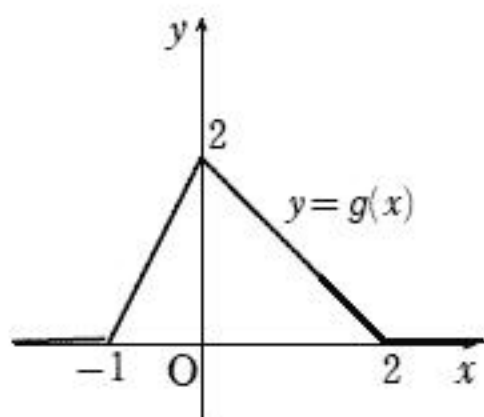
$$h(x-2) = \begin{cases} 0 & (x-2 < 0) \\ x-2 & (x-2 \geq 0) \end{cases} \quad h(2x+2) = \begin{cases} 0 & (2x+2 < 0) \\ 2x+2 & (2x+2 \geq 0) \end{cases}$$

$$h(3x) = \begin{cases} 0 & (3x < 0) \\ 3x & (3x \geq 0) \end{cases}$$

以上より

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x < -1) \\ 2x+2 & (-1 \leq x < 0) \\ -x+2 & (0 \leq x < 2) \\ 0 & (2 \leq x) \end{cases}$$

グラフは右のようになる.



[ Ⅱ ]

(i)  $(x, y)$  が  $C$  上にあるとする. このとき,  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  を満たす

$t$  に対して

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad \text{と表せる.}$$

ここで,  $x = f(t)$

$$= \cos t + \frac{1}{4} \cos 4t$$

$$= \cos(-t) + \frac{1}{4} \cos(-4t)$$

$$= f(-t)$$

$$-y = -g(t)$$

$$= -\sin t - \frac{1}{4} \sin 4t$$

$$= \sin(-t) + \frac{1}{4} \sin(-4t)$$

$$= g(-t)$$

が成り立つ.  $-\frac{\pi}{2} \leq -t \leq \frac{\pi}{2}$  なので,  $(x, -y)$  は  $C$  上にある. ■

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad r^2 &= \{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2 \\ &= \cos^2 t + \frac{1}{2} \cos t \cos 4t + \frac{1}{16} \cos^2 4t \\ &\quad + \sin^2 t + \frac{1}{2} \sin t \sin 4t + \frac{1}{16} \sin^2 4t \\ &= \frac{17}{16} + \frac{1}{2} \cos 3t \end{aligned}$$

$r$  が最小のとき  $\cos 3t$  も最小で,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  ゆえ

$$3a = \pi$$

$$\therefore a = \frac{\pi}{3} \quad \text{.....(答)}$$

$$\begin{aligned} \text{このとき} \quad (f(a), g(a)) &= \left( \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{4} \cos \frac{4}{3} \pi, \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{4} \sin \frac{4}{3} \pi \right) \\ &= \left( \frac{3}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \quad \text{.....(答)} \end{aligned}$$

$r$  が最大のとき  $\cos 3t$  も最大で,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  ゆえ

$$3b = 0$$

$$\therefore b = 0 \quad \text{.....(答)}$$

このとき

$$\begin{aligned} (f(b), g(b)) &= \left( \cos 0 + \frac{1}{4} \cos 0, \sin 0 + \frac{1}{4} \sin 0 \right) \\ &= \left( \frac{5}{4}, 0 \right) \quad \text{.....(答)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \frac{dx}{dt} &= \frac{df(t)}{dt} \\ &= -(\sin t + \sin 4t) \\ &= -2 \sin \frac{5}{2} t \cos \frac{3}{2} t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また} \quad \frac{dy}{dt} &= \frac{dg(t)}{dt} \\ &= \cos t + \cos 4t \\ &= 2 \cos \frac{5}{2} t \cos \frac{3}{2} t \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{2 \cos \frac{5}{2} t \cos \frac{3}{2} t}{-2 \sin \frac{5}{2} t \cos \frac{3}{2} t} \\ &= -\frac{1}{\tan \frac{5}{2} t} \\ &\xrightarrow{t \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sqrt{3} \quad \text{.....(答)} \end{aligned}$$

(iv) (i) の議論より, 媒介変数  $t$  に対する点と  $-t$  に対する点は,  $x$  軸対称の関係にある.

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$  の範囲で考えればよい. (ii) より

$$(f(0), g(0)) = \left( \frac{5}{4}, 0 \right)$$

$$\left( f\left(\frac{\pi}{3}\right), g\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = \left( \frac{3}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8} \right)$$

さらに  $\frac{dx}{dt} = -2 \sin \frac{5}{2} t \cos \frac{3}{2} t$ ,  $\frac{dy}{dt} = 2 \cos \frac{5}{2} t \cos \frac{3}{2} t$  ゆえ

増減表は次のようになる.

| $t$             | 0 |   | $\frac{1}{5} \pi$ |   | $\frac{1}{3} \pi$ |
|-----------------|---|---|-------------------|---|-------------------|
| $\frac{dx}{dt}$ | 0 | - | -                 | - | 0                 |
| $\frac{dy}{dt}$ | + | + | 0                 | - | 0                 |
| $x$             |   | ← | ←                 | ← |                   |
| $y$             |   | ↑ |                   | ↓ |                   |

また,  $C$  の  $t = \frac{\pi}{3}$  での接線の傾き  $\sqrt{3}$  は線分  $OB$  の傾きに一致する.

以上より, 求めるグラフの概形は下のようなになる.

