

2009年度

I a 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべて**HBの黒鉛筆**または**HBの黒のシャープペンシル**で記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は**12ページ**までとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号は**I～IV**となっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 下記の空欄イ～チにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) $\sqrt{2009}$ の小数部分を a とするとき、

$$\frac{n}{88} < a < \frac{n+1}{88}$$

をみたす自然数 n は イ である。

(ii) 定積分 $\int_0^1 \frac{2x^3}{1+x^2} dx$ の値は ロ である。

(iii) 実数 a, b に対して、行列 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$ で表される移動により直線 $y = 2x + 3$

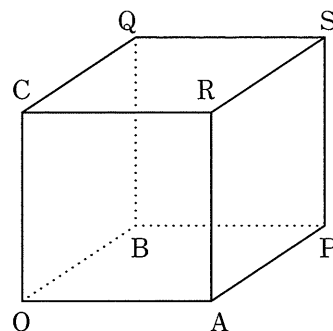
上の任意の点が直線 $y = x + 1$ 上の点に移されるとき、 $a =$ ハ ,
 $b =$ ニ である。

(iv) 右図の立方体において、 $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OR}$

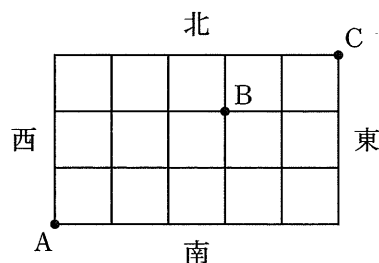
とする。 $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ を用いて $\overrightarrow{OA}$ を表すと、

$$\overrightarrow{OA} = \text{ホ} \vec{p} + \text{ヘ} \vec{q} + \text{ト} \vec{r}$$

と表される。



(v) ある街には、右図のように東西に4本、南北に6本の道がある。Aから出発して、Bを通らないでCまで最短距離で行く道順は、全部で チ 通りある。



Ⅱ. xy 平面上に点 $P(s, 1)$, 点 $Q(1, t)$ があり, s, t は $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ をみたすものとする. また, 点 O を原点 $(0, 0)$ とする. このとき, 次の問(i)~(iii)に答えよ.

(i) P と Q が異なるとき三角形 OPQ の面積を s, t を用いて表せ.

(ii) $\theta = \angle POQ$ とするとき, $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ を s, t を用いて表せ.

(iii) s, t が $s + t = 1$ をみたすとき, θ を最小にする s, t の値と, θ を最大にする s, t の値をそれぞれ求めよ.

Ⅲ. 正の数 a に対して関数 $f(x) = \frac{ax}{x^2 + 1}$ を考える. $y = f(x)$ のグラフを C とするとき, 次の問(i)~(iii)に答えよ.

(i) C の変曲点をすべて求めよ.

(ii) (i)で求めた変曲点のうち x 座標が正である点における法線 l が原点 $O(0, 0)$ を通るような a の値を求めよ.

(iii) a を(ii)で求めた値とする. このとき, 法線 l と C で囲まれる部分の面積 S を求めよ.

IV. 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める.

$$a_1 = 1, \quad a_n = \begin{cases} a_{\frac{n}{2}} + 1 & (n \text{ は } 2 \text{ 以上の偶数}) \\ a_{n-1} + 1 & (n \text{ は } 3 \text{ 以上の奇数}) \end{cases}$$

たとえば,

$$a_2 = a_{\frac{2}{2}} + 1 = a_1 + 1 = 2,$$

$$a_3 = a_{3-1} + 1 = a_2 + 1 = 3$$

となる.

このとき, 次の問(i)~(iv)に答えよ.

(i) $n = 2^5$ のとき a_n を求めよ.

(ii) 自然数 k をひとつ固定して, 数列 $\{b_m\}$ を自然数 m に対して

$$b_m = a_{2^m k}$$

と定める. このとき, b_m を m と a_k を用いて表す式を推測し, その推測が正しいことを m についての数学的帰納法によって証明せよ.

(iii) n が自然数 m_1, m_2 ($m_1 < m_2$) により $n = 2^{m_1} + 2^{m_2}$ と表されるとき, (ii)の結果を用いて a_n を求めよ.

(iv) n が自然数 $m_1, m_2, \dots, m_r$ ($m_1 < m_2 < \dots < m_r$) により

$$n = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \dots + 2^{m_r}$$

と表されるとき a_n を求めよ.

【以下余白】

