

2009年度

B_a 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は8ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ・Ⅱとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 次の問(i)~(iii)に答えよ.

(i) n を自然数, x を正の実数とすると, 不等式 $1 + e^{nx} < e^{nx+1}$ が成立することを示せ. ただし, e は自然対数の底であり, $e > 2$ は証明せずに用いてよい.

(ii) 実数 x に対して, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + e^{nx})}{n}$ の値を, x が負のときと 0 以上のときとに場合分けして求めよ.

(iii) 自然数 n , 実数 x に対して, x の関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{(e^{2n} + e^{nx})(e^{-2n} + e^{2nx})}{1 + e^{3nx}}$$

で定める. さらに, $g(x)$ を

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log f_n(x)}{n}$$

で定める. $g(x)$ を x の値の範囲によって場合分けして求め, $g(x)$ のグラフをかけ.

II. xy 平面において、 $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動く変数 t を用いて、 $x = f(t)$, $y = g(t)$ と媒介変数表示される曲線を C とする。ただし $f(t)$, $g(t)$ は

$$\begin{cases} f(t) = \cos t + \frac{1}{4} \cos 4t \\ g(t) = \sin t + \frac{1}{4} \sin 4t \end{cases}$$

である。このとき、次の問(i)~(iv)に答えよ。

(i) C は x 軸について対称であること、すなわち、 (x, y) が C 上の点であるとき、 $(x, -y)$ は C 上の点であることを示せ。

(ii) 原点 $O(0, 0)$ から C 上の点 $P(f(t), g(t))$ までの距離を r とする。変数 t が $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、 r が最小、最大となる t の値をそれぞれ a, b とする。 a, b の値と、対応する点の座標 $(f(a), g(a))$, $(f(b), g(b))$ を求めよ。

(iii) (ii)で求めた a に対して、極限

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{dy}{dx}$$

を求めよ。

(iv) (ii)で求めた a に対して、点 $A(f(-a), g(-a))$, 点 $B(f(a), g(a))$ とおく。線分 OA , 線分 OB , および C の点 A から点 B までの部分をあわせた図形の概形をかけ。

【以下余白】