

I

$$\text{ア } \frac{31}{8} \quad \text{イ } 25 \quad \quad \quad \text{ウ } \frac{\pi}{3} \quad \quad \text{エ } 2\sqrt{3}$$

$$\text{オ } 14 \quad \text{カ } (3x-y-2)(3x-y+2) \quad \text{キ } 2\sqrt{10} \quad \text{ク } \frac{19}{3}$$

$$\text{ケ } 90 \quad \text{コ } 12\pi \quad \quad \quad \text{サ } 3\sqrt{2}$$

【解説】

(i)

問の等式を変形すると、

$$\begin{aligned} (\log_2 x + 3)(\log_2 x - 2) &= 0 \\ \log_2 x &= 2, -3 \end{aligned}$$

となる。よって、この方程式の解は $2^2 = 4$, $2^{-3} = \frac{1}{8}$ である。 $|\alpha - \beta|$ は 2 解の差に相当するので、

$$|\alpha - \beta| = 4 - \frac{1}{8} = \frac{31}{8}$$

である。

(ii)

10000 を素因数分解すると、

$$10000 = 2^4 \cdot 5^4$$

となるので、約数は $2^a \cdot 5^b$ と表せる。 a, b の選び方は共に 0, 1, 2, 3, 4 の 5 通りあるので、約数の個数は

$$5 \times 5 = 25 \quad (\text{個})$$

である。

(iii)

三角関数の合成を用いて変形すると、

$$f(\theta) = 2\sqrt{3} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

となる。 $0 \leq \theta < 2\pi$ より、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき、この関数は最大値 $2\sqrt{3}$ をとる。

(iv)

食塩水 A の半分には食塩 30g, 水 145g 含まれており、食塩水 B の半分には食塩 40g, 水 285g 含まれているので、これらを混ぜてできる食塩水の濃度は、

$$\frac{30+40}{30+145+40+285} \times 100 = 14\%$$

である。

(v)

与式を因数分解すると、

$$\begin{aligned} 9x^2 - 6xy + y^2 - 4 &= 9x^2 - 6xy + (y+2)(y-2) \\ &= (3x-y-2)(3x-y+2) \end{aligned}$$

となる。

(vi)

直線の式を変形すると、

$$3x - y - 1 = 0$$

となるので、点と直線の距離の公式を用いれば、求める距離は

$$\frac{|3 \cdot (-3) - 1 \cdot 10 - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{10}$$

となる。

(vii)

$x^2 - x - 2 \geq 0$ を解くと、

$$(x-2)(x+1) \geq 0$$

$$x \leq -1, 2 \leq x$$

なので、求める積分値は

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 |x^2 - x - 2| dx &= \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2) dx - \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{7}{6} + \frac{2}{3} - \left(-\frac{10}{3} - \frac{7}{6} \right) \\ &= \frac{19}{3} \end{aligned}$$

となる。

(viii)

上下 2 枚の正方形の面の色の選び方は、 $C_2 = 15$ 通りであり、残りの 4 面を塗り分ける方法は、円順列の考え方を用いて $(4-1)! = 6$ 通りである。

よって、6 面を塗り分ける方法は、

$$15 \times 6 = 90 \quad \text{通り}$$

である。

(ix)

この円錐の母線の長さは、

$$\sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

なので、この円錐を展開すると、半径 2 の円と半径 4 の半円になる。

よって円錐の表面積は、

$$2^2\pi + 4^2\pi \times \frac{1}{2} = 12\pi$$

である。

(x)

それぞれ指数に直してから計算すると、

$$\begin{aligned} 54^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{1}{2}} \times 14^{\frac{1}{4}} \times 490^{-\frac{1}{4}} \times 10^{\frac{1}{4}} \times 7^{-\frac{1}{4}} \times 2^{-\frac{1}{12}} &= 2^{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right)} \times 3 \times 5^{\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)} \times 7^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \times 3 \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

II

x 行目 y 列目の数字を $k_{x,y}$ とすると,

$(x+y)$ が偶数 かつ $x > 1$ ならば, $k_{x,y} + 1 = k_{x-1,y+1}$

$(x+y)$ が奇数 かつ $y > 1$ ならば, $k_{x,y} + 1 = k_{x+1,y-1}$

であり, t を自然数とすれば,

$$k_{1,2t-1} + 1 = k_{1,2t}$$

$$k_{2t,1} + 1 = k_{2t+1,1}$$

である。これらの規則を利用して以下の問題を解く。

(i)

1 行目奇数列目に注目すれば, その値は次のようになる。

$$\begin{aligned} k_{1,2n-1} &= 1 + 2 + \cdots + (2n-1) \\ &= \frac{\{1 + (2n-1)\}(2n-1)}{2} \\ &= n(2n-1) \end{aligned}$$

いま $a_n = k_{1,2n} = k_{1,2n-1} + 1$ なので,

$$\begin{aligned} a_n &= k_{1,2n-1} + 1 \\ &= 2n^2 - n + 1 \end{aligned}$$

よって,

$$a_4 = 2 \times 4^2 - 4 + 1 = 29$$

$$a_5 = 2 \times 5^2 - 5 + 1 = 46$$

となる。

(答) $a_4 = 29$, $a_5 = 46$

(ii)

(i) より,

$$a_n = 2n^2 - n + 1$$

である。

(答) $a_n = 2n^2 - n + 1$

(iii)

最初に整理した規則に従えば,

$$\begin{aligned} b_n &= k_{n,n} \\ &= k_{n-1,n+1} - 1 \\ &= \cdots \\ &= k_{1,2n-1} - (n-1) \\ &= k_{1,2n} - n \\ &= a_n - n \\ &= 2n^2 - 2n + 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $b_n = 2n^2 - 2n + 1$

(iv)

最初に整理した規則に従えば,

$$\begin{aligned} k_{20,23} &= k_{1,42} + 19 \\ &= a_{21} + 19 \\ &= 2 \cdot 21^2 - 21 + 1 + 19 \\ &= 881 \end{aligned}$$

となる。

(答) 881

(v)

20000 に近い値をとる a_n が入っているマスから, 順番に数えていけばよい。

$$a_{100} = 20000 - 100 + 1 = 19901$$

よって,

$$\begin{aligned} 20000 &= a_{100} + 99 \\ &= k_{1,200} + 99 \\ &= k_{100,101} \end{aligned}$$

よって, $x = 100$, $y = 101$ である。

(答) $x = 100$, $y = 101$

Ⅲ

(i)

C_1 と C_2 が 2 つの異なる共有点をもつ条件を求める。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2 &= -\frac{1}{2}(x-2a)^2 + 2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2ax + 2a^2 - 2 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

①の判別式が正となればよいので、求める a の範囲は

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= a^2 - 2a^2 + 2 > 0 \\ \Leftrightarrow -a^2 + 2 &> 0 \\ \Leftrightarrow -\sqrt{2} < a < \sqrt{2}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad -\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$$

(ii)

①より、交点の x 座標は

$$\begin{aligned}x &= a \pm \sqrt{a^2 - 2a^2 + 2} \\ &= a \pm \sqrt{-a^2 + 2}\end{aligned}$$

$\alpha < \beta$ より、

$$\alpha = a - \sqrt{-a^2 + 2}$$

$$\beta = a + \sqrt{-a^2 + 2}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \alpha = a - \sqrt{-a^2 + 2}, \quad \beta = a + \sqrt{-a^2 + 2}$$

(iii)

C_1 の導関数を計算すると、

$$y' = x$$

となる。よって直線 l の式は次のようになる。

$$\begin{aligned}y - \frac{\alpha^2}{2} &= \alpha(x - \alpha) \\ \Leftrightarrow y &= \alpha x - \frac{\alpha^2}{2} \\ \Leftrightarrow y &= (a - \sqrt{-a^2 + 2})x - 1 + a\sqrt{-a^2 + 2}\end{aligned}$$

同様に、直線 m の式は次のようになる。

$$\begin{aligned}y &= \beta x - \frac{\beta^2}{2} \\ \Leftrightarrow y &= (a + \sqrt{-a^2 + 2})x - 1 - a\sqrt{-a^2 + 2}\end{aligned}$$

$$\text{(答)} \quad \text{直線 } l: y = (a - \sqrt{-a^2 + 2})x - 1 + a\sqrt{-a^2 + 2}$$

$$\text{直線 } m: y = (a + \sqrt{-a^2 + 2})x - 1 - a\sqrt{-a^2 + 2}$$

(iv)

2 直線の交点の x 座標を求める。

$$\begin{aligned}\alpha x - \frac{\alpha^2}{2} &= \beta x - \frac{\beta^2}{2} \\ (\alpha - \beta)x &= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} \\ \therefore x &= \frac{\alpha + \beta}{2} = a \quad (\because \alpha \neq \beta)\end{aligned}$$

さらに、交点の y 座標は

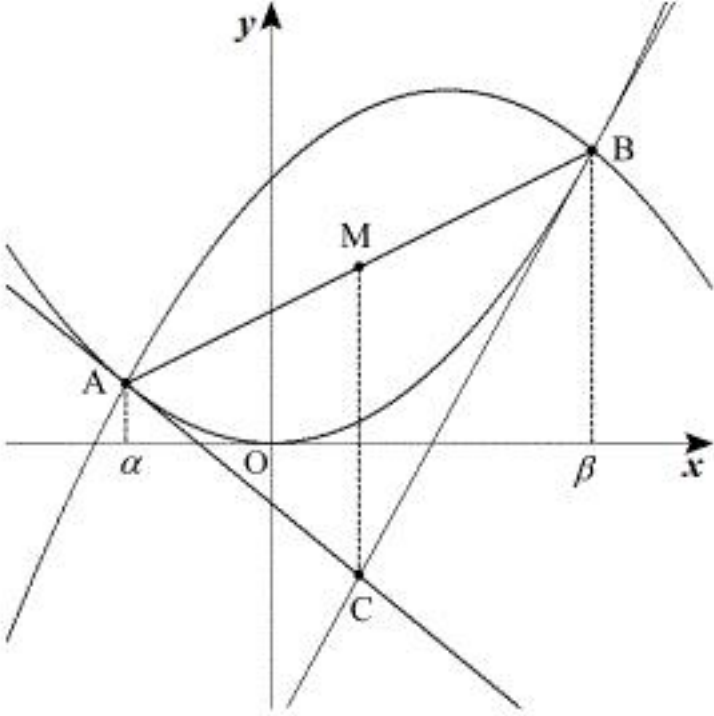
$$\begin{aligned}y &= (a - \sqrt{-a^2 + 2})a - 1 + a\sqrt{-a^2 + 2} \\ &= a^2 - 1\end{aligned}$$

となる。よって、交点の座標は、点 $C(a, a^2 - 1)$ である。三角形 ABC の面積を求めるにあたり、

まず AB の中点 M の座標 (m_x, m_y) を求める。 $\alpha + \beta = 2a$, $\alpha\beta = 2a^2 - 2$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned}m_x &= \frac{\alpha + \beta}{2} \\ &= a \\ m_y &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{4} \\ &= 1\end{aligned}$$

が得られる。 C と M は x 座標が等しいので、線分 CM は x 軸に直交する。



上図より、三角形 ABC の面積 S は次のように求められる。

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \overline{CM} \cdot (\beta - \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \{ 1 - (a^2 - 1) \} (\beta - \alpha) \\ &= \frac{1}{2} (2 - a^2) \cdot 2\sqrt{2 - a^2} \\ &= (2 - a^2)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$$\text{(答)} \quad \text{点 } C(a, a^2 - 1), \quad S = (2 - a^2)^{\frac{3}{2}}$$

(v)

S が最大となるのは、 $2 - a^2$ が最大となるときである。

よって、 $a = 0$ のとき S は最大となり、その値は

$$2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad a = 0, \quad S = 2\sqrt{2}$$