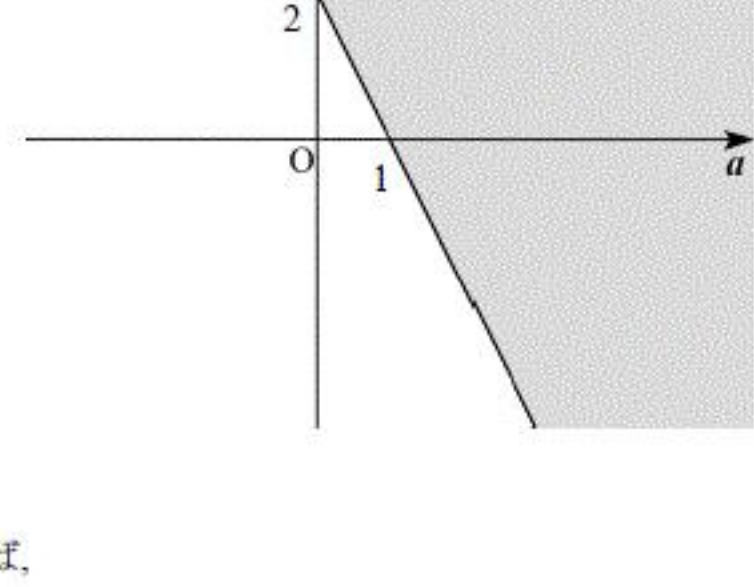


I.

(i)	☐ ア	偽	☐ イ	真
(ii)	☐ ウ	$\frac{22\sqrt{5}}{27}$		
(iii)	☐ エ	$\frac{22}{3}$		
(iv)	☐ オ	$10n-13$		
(v)	☐ カ	16		
(vi)	☐ キ	9.6		
(vii)	☐ ク	$-68-4\sqrt{3}i$		
(viii)	☐ ケ	6370		
(ix)	☐ コ	$\frac{9}{16}$		
(x)	☐ サ	$\frac{11}{5}$	☐ シ	$-\frac{12}{5}$

【解説】
(i)
命題「 $a>0$ または $b>2$ ならば、 $2a+b>2$ である」は偽である。反例は
 $a=1, b=0$
がある。この命題の逆「 $2a+b>2$ ならば、 $a>0$ または $b>2$ である」は真である。なぜならば、
 $2a+b>2$
 $\Leftrightarrow b>-2a+2$
であり、これが表す領域を ab 平面に図示すると次図のようになる。ただし、境界線は含まない。



よって $2a+b>2$ ならば、
[1] $a>0$ のとき
「 $a>0$ または $b>2$ 」を満たす。
[2] $a\leq 0$ のとき
前図より $b>2$ となるので、「 $a>0$ または $b>2$ 」を満たす。
したがって命題「 $2a+b>2$ ならば、 $a>0$ または $b>2$ である」は真である。

(ii)
 $x=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}, y=\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ のとき、
$$\begin{aligned} x+y &= \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \\ &= \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{3} \\ xy &= \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ゆえに、
$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)^3-3xy(x+y) \\ &= \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^3-3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{3} \\ &= \frac{22\sqrt{5}}{27} \end{aligned}$$

である。

(iii)
$$\begin{aligned} \int_0^2 (x^2-ax+8)dx &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{2}x^2 + 8x \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} - 2a + 16 \end{aligned}$$

これが4であるから、
$$\frac{8}{3} - 2a + 16 = 4$$

$$\therefore a = \frac{22}{3}$$

となる。

(iv)
 $a_1=-3, a_{n+1}=a_n+10$ より、数列 $\{a_n\}$ は初項 -3 、公差 10 の等差数列である。したがって、
$$\begin{aligned} a_n &= -3 + 10(n-1) \\ &= 10n-13 \end{aligned}$$

である。

(v)
 $M=\left(\frac{1}{4}\right)^{25}$ とおく。底を10とする対数を M に対してとると、
$$\begin{aligned} \log_{10} M &= \log_{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{25} \\ &= 25 \log_{10} \frac{1}{4} \\ &= 25 \log_{10} 2^{-2} \\ &= -50 \log_{10} 2 \\ &= -15.05 \end{aligned}$$

したがって
 $M=10^{-15.05}$
である。よって、
 $10^{-16} < M < 10^{-15}$
となるので、 $M=\left(\frac{1}{4}\right)^{25}$ を小数で表した場合、小数第16位に初めて0でない数字が現れる。

(vi)
家から仕事場までの距離を x m、仕事が始まるまでの時間を T 分とする。徒歩（分速80m）で行くと仕事開始予定に40分遅れるということは、つまり徒歩で行くと $T+40$ 分で仕事場に着くことになるので、
$$x=80(T+40) \qquad \cdots \textcircled{1}$$

オートバイで行くと仕事開始予定の1時間前に着いたということは、つまりオートバイで行くと $T-60$ 分で仕事場に着くことになるので、
$$x=480(T-60) \qquad \cdots \textcircled{2}$$

 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を連立させて解くと、
$$\begin{aligned} T &= 80 \text{ 分} \\ x &= 9600 \text{ m} = 9.6 \text{ km} \end{aligned}$$

である。

(vii)
$$\begin{aligned} x &= 1 - \sqrt{3}i \\ \Leftrightarrow x-1 &= -\sqrt{3}i \end{aligned}$$

この式の両辺を2乗して、
$$\begin{aligned} (x-1)^2 &= (-\sqrt{3}i)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 2x-4 \end{aligned}$$

よって、これを用いると、
$$\begin{aligned} x^4 &= (x^2)^2 = (2x-4)^2 \\ &= 4x^2 - 16x + 16 \\ &= 4(2x-4) - 16x + 16 \\ &= -8x \\ x^3 &= x \cdot x^2 = x(2x-4) \\ &= 2x^2 - 4x \\ &= 2(2x-4) - 4x \\ &= -8 \end{aligned}$$

であるから、
$$\begin{aligned} 5x^4 + 3x^3 + 22x^2 + 40 &= 5(-8x) + 3(-8) + 22(2x-4) + 40 \\ &= 4x - 72 \\ &= 4(1-\sqrt{3}i) - 72 \\ &= -68 - 4\sqrt{3}i \end{aligned}$$

となる。

(viii)
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} k(2k+3) &= \sum_{k=1}^{20} (2k^2+3k) \\ &= 2 \cdot \frac{20(20+1)(2\cdot 20+1)}{6} + 3 \cdot \frac{20(20+1)}{2} \\ &= 6370 \end{aligned}$$

である。

(ix)
底辺の長さが x 、高さが y の三角形の面積は
$$\frac{1}{2}xy$$

である。ここで
$$\begin{aligned} 2x+y &= 3 \\ \Leftrightarrow y &= -2x+3 \end{aligned}$$

であるから、三角形の面積は
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x(-2x+3) &= -x^2 + \frac{3}{2}x \\ &= -\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{16} \end{aligned} \qquad \cdots \textcircled{3}$$

と表される。いま $x>0, y>0$ なので、 x は
$$\begin{aligned} x &> 0, -2x+3 > 0 \\ \Leftrightarrow 0 &< x < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

の範囲を動く。 x がこの範囲にあるとき、 $\textcircled{3}$ は $x=\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{9}{16}$ をとる。

(x)
直線 $3x-y-2=0$ に関して点 $(-2, -1)$ と対称な点の座標を (p, q) とおく。
$$\begin{aligned} 3x-y-2 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= 3x-2 \end{aligned}$$

より、直線 $3x-y-2=0$ の傾きは3である。点 $(-2, -1)$ と点 (p, q) を通る直線と直線 $3x-y-2=0$ は直交するので、
$$\begin{aligned} \frac{q+1}{p+2} \cdot 3 &= -1 \\ \therefore p+3q &= -5 \end{aligned} \qquad \cdots \textcircled{4}$$

また、点 $(-2, -1)$ と点 (p, q) の中点が直線 $3x-y-2=0$ 上にあるので、
$$\begin{aligned} 3 \cdot \frac{p-2}{2} - \frac{q-1}{2} - 2 &= 0 \\ \therefore 3p-q &= 9 \end{aligned} \qquad \cdots \textcircled{5}$$

 $\textcircled{4}, \textcircled{5}$ を連立させて解くと、
$$p = \frac{11}{5}, q = -\frac{12}{5}$$

したがって、点 $(-2, -1)$ と対称な点の座標は
$$\left(\frac{11}{5}, -\frac{12}{5}\right)$$

である。

II.

(i)

ア	$\frac{1}{4}$	イ	B	ウ	A
エ	$\frac{1}{8}$	オ	$\frac{1}{8}$		

(ii)

「追い越し」が1回も発生しない確率を求める。「追い越し」が1回も発生しないコインの出方は、最初に表が出る場合、

表→表→表→表→表→表
 表→表→表→表→表→裏
 表→表→表→表→裏→表
 表→表→表→表→裏→裏
 表→表→表→裏→表→表
 表→表→表→裏→表→裏
 表→表→表→裏→裏→表
 表→表→裏→表→表→表
 表→表→裏→表→表→裏
 表→表→裏→表→裏→表

の10通りの出方が考えられる。対称性から、最初に裏が出る場合も、「追い越し」が発生しないのは10通りである。ゆえに、「追い越し」が1回も発生しない確率は、

$$(10+10) \times \left(\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{5}{16}$$

したがって、コインを6回投げた結果、「追い越し」が1回以上発生する確率は、

$$1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$$

である。

(答) $\frac{11}{16}$

【解説】

(i)

コインを2回投げた結果、Aが石段の1段目、Bが0段目にいるのは、コインが裏→表と出た場合のみである。よってこの確率は、

$$P_2(1, 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

このときコインを1回目に投げた結果、Bが1段上がり、コインを2回目に投げた結果、Aが1段上がり、Bが1段下がる「追い越し」が発生している。

コインを3回投げた結果、Aが石段の2段目に、Bが1段目にいるのは、コインが表→表→裏と出た場合のみである。よってこの確率は、

$$P_3(2, 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

コインを4回投げた結果、Aが石段の2段目に、Bが1段目にいるのは、コインが裏→裏→表→表あるいは裏→表→表→裏と出る2通りの場合である。よってこの確率は、

$$P_4(2, 1) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$$

である。

Ⅲ.

(i)

2点 P, Q を通る直線の方程式は,

$$y-a=\frac{a-(1-a)}{a-(-1+a)}(x-a)$$

$$\therefore y=(2a-1)x-2a^2+2a$$

$$(\text{答}) y=(2a-1)x-2a^2+2a$$

(ii)

線分 PQ が直線 $x=\frac{1}{2}$ と交わるには, 点 P, Q が直線 $x=\frac{1}{2}$ に関して互いに反対に存在するか,

点 P, Q のうちいずれかの点が直線 $x=\frac{1}{2}$ 上に存在する必要がある。よって,

$$-1+a \leq \frac{1}{2} \leq a$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$$

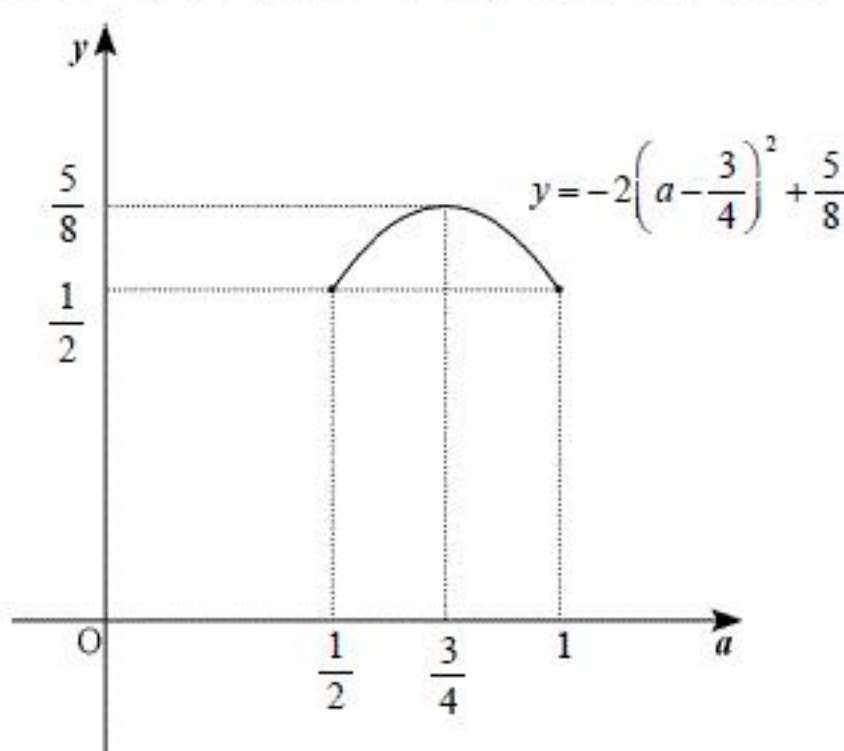
$0 \leq a \leq 1$ なので, 線分 PQ が直線 $x=\frac{1}{2}$ と交わるための a の範囲は,

$$\frac{1}{2} \leq a \leq 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。 a がこの範囲にあるとき, 線分 PQ と直線 $x=\frac{1}{2}$ の交点 (R とする) の y 座標は,

$$\begin{aligned} y &= (2a-1) \cdot \frac{1}{2} - 2a^2 + 2a \\ &= -2a^2 + 3a - \frac{1}{2} \\ &= -2\left(a - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{5}{8} \end{aligned}$$

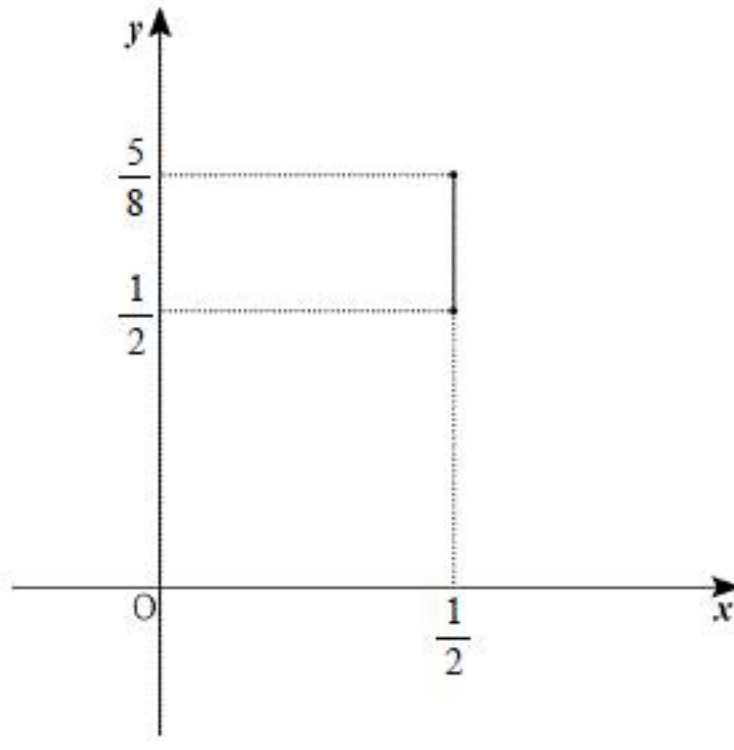
ゆえに, y を a の関数とみなし, ①の範囲でこれを ay 平面に図示すると, 次図になる。



前図より, 点 R の y 座標のとりうる値の範囲は,

$$\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{5}{8}$$

したがって交点 R の軌跡は次図の実線部である。ただし, 端点も含む。



(答) 前図

(iii)

b を実数として, 直線 $x=b$ と線分 PQ がどのように交わるかを考える。直線 $x=b$ と線分 PQ が交わるには, (ii) のときと同様, 点 P, Q が直線 $x=b$ に関して互いに反対に存在するか, 点

P, Q のうちいずれかの点が $x=\frac{1}{2}$ 上に存在する必要がある。よって,

$$-1+a \leq b \leq a$$

$$\Leftrightarrow b \leq a \leq b+1$$

$0 \leq a \leq 1$ なので, 直線 $x=b$ と線分 PQ が交わるための a の範囲は,

$b < -1$ のとき, このような a は存在しない

$$-1 \leq b < 0 \text{ のとき, } 0 \leq a \leq b+1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$0 \leq b \leq 1 \text{ のとき, } b \leq a \leq 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

$1 < b$ のとき, このような a は存在しない

②, ③の範囲に a があるとき, 交点の y 座標は,

$$\begin{aligned} y &= (2a-1)b - 2a^2 + 2a \\ &= -2a^2 + 2(b+1)a - b \\ &= -2\left(a - \frac{b+1}{2}\right)^2 + \frac{b^2+1}{2} \end{aligned}$$

よって, y を a の関数とみなして ay 平面で考えると, この式は放物線を表すが, その軸

$a=\frac{b+1}{2}$ の値は②, ③のそれぞれの場合で, a のとりうる値の範囲に含まれる。したがって,

$-1 \leq b \leq 1$ のとき y は $a=\frac{b+1}{2}$ で最大値をとり, その値は,

$$y_{\max} = \frac{b^2+1}{2}$$

である。また, a が②の範囲にあるときは, y は $a=0, b+1$ で最小値をとり, その値は,

$$y_{\min} = -b$$

a が③の範囲にあるときは, y は $a=b, 1$ で最小値をとり, その値は,

$$y_{\min} = b$$

②, ③の両方の場合で, y は $y_{\min}$ から $y_{\max}$ の全ての値をとる。以上をまとめると, 線分 PQ の通る領域内の点の y 座標は,

$$-b \leq y \leq \frac{b^2+1}{2} \quad (-1 \leq b < 0)$$

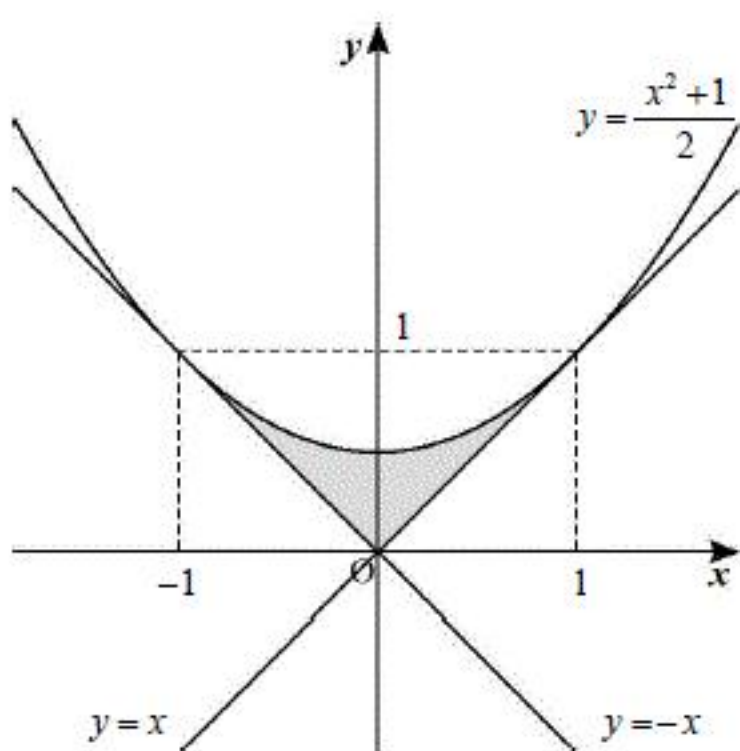
$$b \leq y \leq \frac{b^2+1}{2} \quad (0 \leq b \leq 1)$$

となる。つまり, 線分 PQ の通過する領域は,

$$-x \leq y \leq \frac{x^2+1}{2} \quad (-1 \leq x < 0)$$

$$x \leq y \leq \frac{x^2+1}{2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

である。この領域を図示すると次図の灰色部になる。ただし, 境界線も含む。



したがって, 領域の面積 S は, y 軸に関する対称性に注意して,

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^1 \left\{ \left(\frac{x^2+1}{2} \right) - x \right\} dx \\ &= 2 \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) S = \frac{1}{3}$$