

I.

- (i) $\boxed{\text{ア}}$ $\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
- (ii) $\boxed{\text{イ}}$ 160
- (iii) $\boxed{\text{ウ}}$ $4\sqrt{3}$
- (iv) $\boxed{\text{エ}}$ $\frac{1}{9}$
- (v) $\boxed{\text{オ}}$ $\frac{3}{2}$ $\boxed{\text{カ}}$ (3, 0)
- (vi) $\boxed{\text{キ}}$ $3 < x < \frac{5+\sqrt{17}}{2}$
- (vii) $\boxed{\text{ク}}$ $\frac{\sqrt{10}}{10}$ $\boxed{\text{ケ}}$ 0 $\boxed{\text{コ}}$ $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$
- (viii) $\boxed{\text{サ}}$ 9π
- (ix) $\boxed{\text{シ}}$ -3 $\boxed{\text{ス}}$ 6
- (x) $\boxed{\text{セ}}$ $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2}{3}\pi$

〔解説〕

- (i)
- $$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} &= \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})} \\ &= \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$
- (ii)
- 300 以下の自然数のうち 3 で割り切れるものは、
- $$\frac{300}{3}=100 \text{ (個)}$$
- 5 で割り切れるものは、
- $$\frac{300}{5}=60 \text{ (個)}$$
- 3 でも 5 でも割り切れるものは、3 と 5 の最小公倍数が 15 なので、
- $$\frac{300}{15}=20 \text{ (個)}$$
- よって、300 以下の自然数のうち、3 か 5 の少なくとも一方で割り切れるものは、
- $$100+60-20=140 \text{ (個)}$$
- ゆえに、300 以下の自然数のうち、3 でも 5 でも割り切れないものは
- $$300-140=160 \text{ (個)}$$
- である。

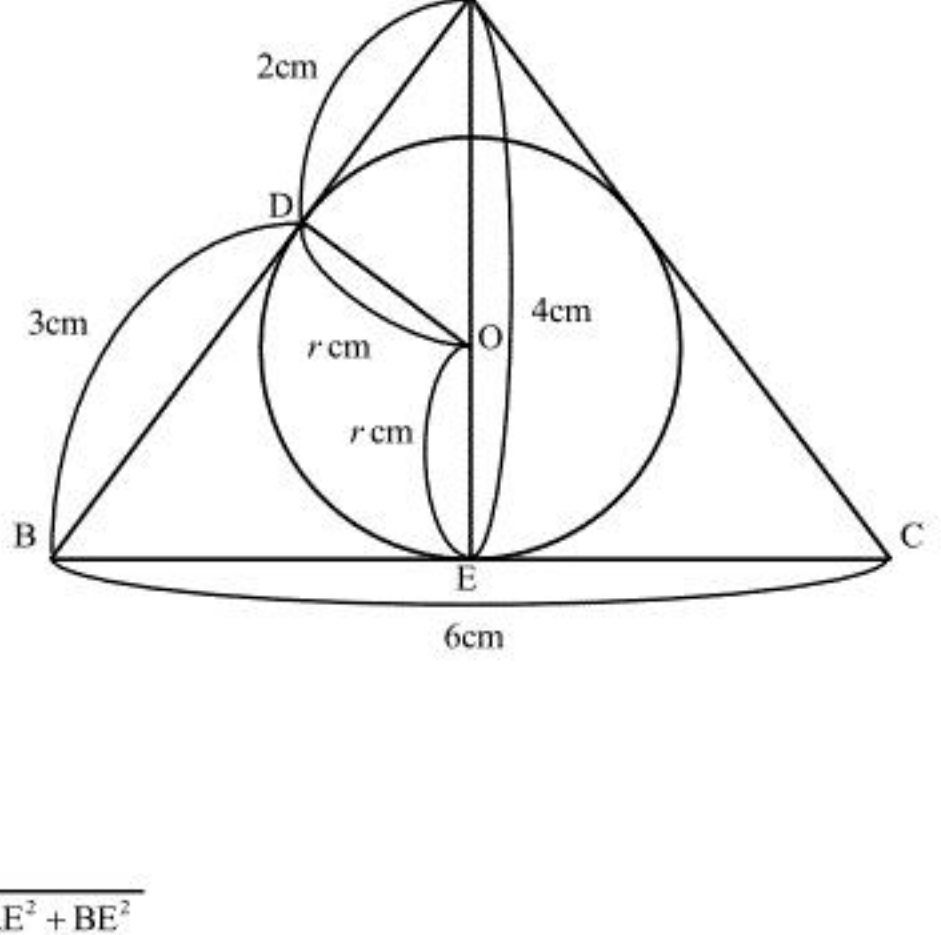
- (iii)
- a は正の実数なので、 $3a, \frac{4}{a}$ はともに正の実数である。よって、相加相乗平均の関係から、
- $$3a+\frac{4}{a} \geq 2\sqrt{3a \cdot \frac{4}{a}}=4\sqrt{3}$$
- という関係が成り立つ。ただし、等号は、
- $$3a=\frac{4}{a}$$
- $$\therefore a=\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ (}\because a>0\text{)}$$
- で成り立つ。 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき確かに $3a+\frac{4}{a}=4\sqrt{3}$ となるので、 $3a+\frac{4}{a}$ の最小値は $4\sqrt{3}$ である。

- (iv)
- A, B, C, D それぞれの袋について、白、黒、赤それぞれの玉を取り出す確率は等しい。それぞれの袋から 1 個の玉を抜き出すとき、抜き出された玉がすべて赤玉である確率は、
- $$\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$$
- 同様に、抜き出された 4 個の玉のうち 3 個のみが赤玉であり、残りの 1 個は赤玉以外である確率は、
- $${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{81}$$
- 上記 2 事象は同時に起こらないので、求める確率は、
- $$\frac{1}{81}+\frac{8}{81}=\frac{9}{81}=\frac{1}{9}$$
- である。

- (v)
- 円 C は半径 3、原点中心の円なので、C 上の点 Q の座標は $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす実数 θ を用いて、
- $$(3\cos\theta, 3\sin\theta)$$
- と表せる。ゆえに 2 点 P, Q の中点の座標を (M_x, M_y) とおくと、
- $$\begin{cases} M_x=\frac{3\cos\theta+6}{2} & \cdots \textcircled{1} \\ M_y=\frac{3}{2}\sin\theta & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$
- となる。
- $$\textcircled{1} \Leftrightarrow \cos\theta=\frac{2}{3}(M_x-3)$$
- $$\textcircled{2} \Leftrightarrow \sin\theta=\frac{2}{3}M_y$$
- なので、
- $$\begin{aligned}\cos^2\theta+\sin^2\theta &= \left\{\frac{2}{3}(M_x-3)\right\}^2+\left(\frac{2}{3}M_y\right)^2=1 \\ \Leftrightarrow (M_x-3)^2+M_y^2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2\end{aligned}$$
- これは半径 $\frac{3}{2}$ 、中心 (3, 0) の円の方程式である。

- (vi)
- 真数条件より、
- $$\begin{aligned}x-2>0 \quad \text{かつ} \quad x-3>0 \\ \Leftrightarrow x>3 \quad \cdots \textcircled{3}\end{aligned}$$
- 間の不等式の左辺、右辺はそれぞれ
- $$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+\log_{\frac{1}{2}}(x-3) &= \frac{\log_2(x-2)}{\log_2\frac{1}{2}}+\frac{\log_2(x-3)}{\log_2\frac{1}{2}} \\ &= -\log_2(x-2)-\log_2(x-3) \\ &= -\log_2(x-2)(x-3) \\ -2 &= -\log_2 2^2 = -\log_2 4\end{aligned}$$
- と変形できるので、
- $$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+\log_{\frac{1}{2}}(x-3) &> -2 \\ \Leftrightarrow -\log_2(x-2)(x-3) &> -\log_2 4 \\ \Leftrightarrow \log_2(x-2)(x-3) &< \log_2 4\end{aligned}$$
- 底 $2>1$ なので、
- $$\begin{aligned}(x-2)(x-3) &< 4 \\ \Leftrightarrow x^2-5x+2 &< 0\end{aligned}$$
- これを解くと、
- $$\frac{5-\sqrt{17}}{2}<x<\frac{5+\sqrt{17}}{2}$$
- である。これと③とから、求める x の範囲は
- $$3<x<\frac{5+\sqrt{17}}{2}$$
- となる。

- (vii)
- 求める単位ベクトルは xz 平面上にあるので、実数 a, b ($b<0$) を用いて
- $$(a, 0, b)$$
- と表せる。これは単位ベクトルなので、
- $$\begin{aligned}\sqrt{a^2+0^2+b^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} &= 1\end{aligned}$$
- 両辺を 2 乗して、
- $$a^2+b^2=1 \quad \cdots \textcircled{4}$$
- また、この単位ベクトルはベクトル $(3, -1, 1)$ と垂直なので、
- $$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= 3a+b=0 \\ \Leftrightarrow a &= -\frac{b}{3}\end{aligned}$$
- これを④に代入して、
- $$\begin{aligned}\left(-\frac{b}{3}\right)^2+b^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow b^2 &= \frac{9}{10} \\ \therefore b &= -\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10} \text{ (}\because b<0\text{)}\end{aligned}$$
- また、
- $$a = -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) = \frac{\sqrt{10}}{10}$$
- したがって、求める単位ベクトルは、
- $$\left(\frac{\sqrt{10}}{10}, 0, -\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$
- である。

- (viii)
- 問の円錐を、頂点と底面の直径を通る平面で球と共に切ると、その断面は二等辺三角形と円になる。この断面図に対し、次図のように二等辺三角形を ABC ($AB=AC$)、球の中心を O 、球と辺 AB の接点を D 、球と辺 BC の接点を E という記号を定める。
- 
- このとき、
- $$\begin{aligned}AB &= \sqrt{AE^2+BE^2} \\ &= \sqrt{4^2+3^2} \quad \left(\because BE=\frac{1}{2}BC\right) \\ &= 5\end{aligned}$$
- また、
- $$\begin{aligned}BD &= BE=3 \\ \therefore AD &= AB-DB=2\end{aligned}$$
- さらに、円の半径(=球の半径)を r cm とすれば、
- $$\begin{aligned}OD &= OE=r \\ AO &= AE-OE=4-r\end{aligned}$$
- よって、 $\triangle ADO$ は $\angle ADO=90^\circ$ の直角三角形なので、
- $$\begin{aligned}AD^2+DO^2 &= AO^2 \\ \Leftrightarrow 2^2+r^2 &= (4-r)^2 \\ \Leftrightarrow r &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$
- したがって、球の半径は $\frac{3}{2}$ cm なので、この球の表面積は、
- $$4\pi r^2=9\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$
- である。

- (ix)
- $$\begin{aligned}y &= 3x^2+2ax+a \\ &= 3\left(x+\frac{a}{3}\right)^2-\frac{a^2}{3}+a\end{aligned}$$
- よって、放物線 $y=3x^2+2ax+a$ の頂点の座標は $\left(-\frac{a}{3}, -\frac{a^2}{3}+a\right)$ である。
- ゆえに、この放物線を x 軸方向に a 、 y 軸方向に b 平行移動した放物線の頂点の座標は、
- $$\left(-\frac{a}{3}+a, -\frac{a^2}{3}+a+b\right)=\left(\frac{2}{3}a, -\frac{a^2}{3}+a+b\right)$$
- 移動後の放物線は点 $(-2, 0)$ で x 軸と接するので、その頂点は点 $(-2, 0)$ である。つまり、
- $$\begin{cases} \frac{2}{3}a=-2 & \cdots \textcircled{5} \\ -\frac{a^2}{3}+a+b=0 & \cdots \textcircled{6} \end{cases}$$
- ⑤より、
- $$a=-3$$
- これを⑥に代入して
- $$-\frac{(-3)^2}{3}-3+b=0$$
- $$\therefore b=6$$
- となる。

- (x)
- $$\begin{aligned}-\cos^2\theta+\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta &> 0 \\ \Leftrightarrow -1+\sin^2\theta+\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta &> 0 \\ \Leftrightarrow \sin^2\theta+\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta-1 &> 0 \\ \Leftrightarrow \sin\theta > \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\theta < -\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$
- $0 \leq \theta < 2\pi$ より $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ であるので、 $\sin\theta$ の取り得る範囲は
- $$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\theta \leq 1$$
- であり、これを満たす θ の範囲は、
- $$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2}{3}\pi$$
- である。

II.

(i)

1, 2, 3, 4, 5 の 5 枚のカードから 2 枚を取る組み合わせは次の 10 通りである。

$$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)$$

これらの組み合わせの s はそれぞれ,

$$s = 3, 4, 5, 6, 5, 6, 7, 7, 8, 9$$

したがって,

$$\begin{aligned} S_n &= 3+4+5+6+5+6+7+7+8+9 \\ &= 60 \end{aligned}$$

(答) 60

(ii)

1 枚を整数 k が書かれたカードとして固定してしまうと, もう 1 枚のカードに書かれた整数として k 以外の $n-1$ 通りが考えられるので, 取り出したカードのうちどちらかに k が書かれている取り出し方は $n-1$ 通りである。

(答) $n-1$ 通り

(iii)

1 から n までの異なる整数が書かれた n 枚のカードから 2 枚を取り出し方を考えたとき, その中で k ($k=1, 2, \dots, n$) が書かれたカードが出現する回数は(ii)より $n-1$ 回である。よって,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (n-1)k \\ &= (n-1) \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$(答) S_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{2}$$

(iv)

k ($k=1, 2, \dots, n$) に対し, 1 から n までの異なる整数が書かれたカードから 3 枚取り出すとき, どれかのカードに k が書かれている取り出し方は, k が書かれているカード以外の $n-1$ 枚のカードから 2 枚取り出す場合の数だから,

$${}_{n-1}C_2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \text{ (通り)}$$

これは全ての k ($k=1, 2, \dots, n$) について成り立つので, T_n は,

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(答) T_n = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{4}$$

Ⅲ.

(i)

$$\begin{aligned} C_1: y &= x^2 + ax + b \\ &= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b \end{aligned}$$

より、 C_1 の頂点の座標は、

$$\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + b\right)$$

である。また、

$$\begin{aligned} C_2: y &= -x^2 + cx + d \\ &= -\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{c^2}{4} + d \end{aligned}$$

より、 C_2 の頂点の座標は

$$\left(\frac{c}{2}, \frac{c^2}{4} + d\right)$$

である。

$$\begin{aligned} \text{(答)} \quad C_1 \text{の頂点} & \quad \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + b\right) \\ C_2 \text{の頂点} & \quad \left(\frac{c}{2}, \frac{c^2}{4} + d\right) \end{aligned}$$

(ii)

C_1, C_2 に2つの共有点A, Bがあり、それらの x 座標がそれぞれ $-2, 3$ であるので、

C_1, C_2 の方程式から y を消去した方程式、

$$\begin{aligned} x^2 + ax + b &= -x^2 + cx + d \\ \Leftrightarrow 2x^2 + (a-c)x + b-d &= 0 \end{aligned}$$

が $x = -2, 3$ を解に持つ。ゆえに解と係数の関係から、

$$\begin{cases} -\frac{a-c}{2} = -2+3=1 \\ \frac{b-d}{2} = (-2) \cdot 3 = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-c = -2 & \cdots \text{①} \\ b-d = -12 & \cdots \text{②} \end{cases}$$

が成り立つ。 C_1, C_2 の頂点の y 座標がそれぞれ $-5, 12$ なので、(i)の結果より、

$$\begin{cases} -\frac{a^2}{4} + b = -5 \\ \frac{c^2}{4} + d = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{a^2}{4} - 5 & \cdots \text{③} \\ d = -\frac{c^2}{4} + 12 & \cdots \text{④} \end{cases}$$

③-④と②から

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^2}{4} - 5\right) - \left(-\frac{c^2}{4} + 12\right) &= -12 \\ \Leftrightarrow a^2 + c^2 &= 20 \end{aligned}$$

①より $c = a+2$ なので、これと前式より、

$$\begin{aligned} a^2 + (a+2)^2 &= 20 \\ \Leftrightarrow (a+4)(a-2) &= 0 \\ \therefore a &= 2 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

③より

$$b = \frac{2^2}{4} - 5 = -4$$

①より

$$c = 2+2 = 4$$

④より

$$d = -\frac{4^2}{4} + 12 = 8$$

以上より、 $a = 2, b = -4, c = 4, d = 8$ である。

$$\text{(答)} \quad a = 2, b = -4, c = 4, d = 8$$

(iii)

放物線 C_2 の方程式は(ii)より、

$$y = -x^2 + 4x + 8$$

点A, Bの x 座標がそれぞれ $-2, 3$ であることと、この2点が C_2 上にあることから、

点A, Bの y 座標を求めると、

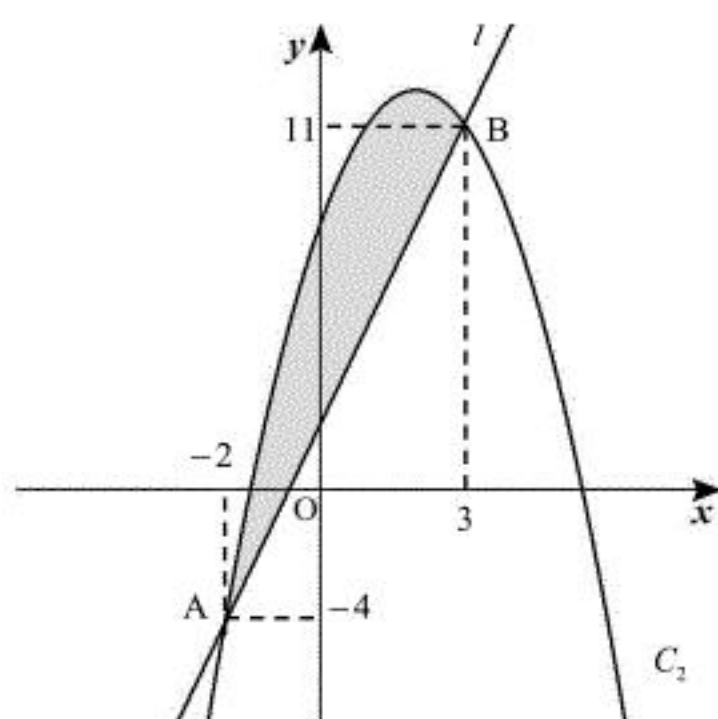
$$\text{Aの} y \text{座標: } y = -(-2)^2 + 4(-2) + 8 = -4$$

$$\text{Bの} y \text{座標: } y = -3^2 + 4 \cdot 3 + 8 = 11$$

よって、点A, Bの座標はそれぞれ $(-2, -4), (3, 11)$ であるので、直線 l の方程式は

$$l: y = 3x + 2$$

ゆえに、直線 l と放物線 C_2 で囲まれる図形は次の図の灰色部である。



したがって、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^3 \left\{ (-x^2 + 4x + 8) - (3x + 2) \right\} dx \\ &= -\int_{-2}^3 (x-3)(x+2) dx \\ &= \frac{1}{6} (3+2)^3 \\ &= \frac{125}{6} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{125}{6}$$

(iv)

放物線 C_3 は点A, Bで直線 l と交わるので、放物線 C_3 と直線 l で囲まれる部分の面積は、

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 \left\{ (3x+2) - (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \right\} dx &= -\alpha \int_{-2}^3 (x-3)(x+2) dx \\ &= -\alpha \left(-\frac{1}{6} \right) (3+2)^3 \\ &= \frac{125\alpha}{6} \end{aligned}$$

と書き表せる。これが $3S = \frac{125}{2}$ と等しくなるので、 $\alpha = 3$ となる。よって、放物線 C_3 は

$$y = 3x^2 + \beta x + \gamma$$

と表すことができ、これが点A $(-2, -4)$ 、B $(3, 11)$ を通るので、

$$\begin{cases} -4 = 12 - 2\beta + \gamma \\ 11 = 27 + 3\beta + \gamma \end{cases}$$

$$\therefore \beta = 0, \gamma = -16$$

$$\text{(答)} \quad \alpha = 3, \beta = 0, \gamma = -16$$