

【解答】

(i) ア $\frac{9}{4} < m < 3$

(ii) イ 1701

(iii) ウ $\frac{\pi}{4}$

(iv) エ 51

(v) オ 180

(vi) カ $-\frac{4}{13}$

(vii) キ -2

(viii) ク 5

(ix) ケ $\frac{3n}{6n+4}$

(x) コ $-\frac{7}{2}$ サ 2

【解説】

(i) $x^2+2(m-1)x+4=0$ の判別式を D_1 とおくと、この方程式が実数解を持たないとき

$$\begin{aligned} D_1 &< 0 \\ \Leftrightarrow (m-1)^2-4 &< 0 \\ \Leftrightarrow (m+1)(m-3) &< 0 \\ \Leftrightarrow -1 < m < 3 \end{aligned}$$

である。また、 $x^2+3x+m=0$ の判別式を D_2 とおくと、この方程式が実数解を持たないとき

$$\begin{aligned} D_2 &< 0 \\ \Leftrightarrow 9-4m &< 0 \\ \Leftrightarrow m &> \frac{9}{4} \end{aligned}$$

である。よって、2つの方程式がいずれも実数解を持たないような m の値の範囲は

$$\frac{9}{4} < m < 3$$

である。

(ii)

$\left(\frac{1}{2}x+3\right)^8$ を展開したとき、 x^3 の係数は二項定理より

$${}_8C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 3^5=1701$$

となる。

(iii)

$\overline{AB}=(4,4,2), \overline{AC}=(0,1,1)$ であるから

$$\begin{aligned} \cos \angle BAC &= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} \\ &= \frac{4 \cdot 0+4 \cdot 1+2 \cdot 1}{\sqrt{4^2+4^2+2^2} \cdot \sqrt{0^2+1^2+1^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となり、 $0<\angle BAC<\pi$ であるから

$$\angle BAC=\frac{\pi}{4}$$

となる。

(iv)

バナナが好きな人の集合を A 、イチゴが好きな人の集合を B とし、集合 X の要素の個数を $n(X)$ と表すこととすると

$$n(A)=43, n(B)=39, n(A \cap B)=32$$

であるから、バナナかイチゴの少なくとも一方が好きな人の人数 $n(A \cup B)$ は

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A)+n(B)-n(A \cap B) \\ &= 43+39-32 \\ &= 50 \end{aligned}$$

となる。よって、バナナとイチゴがいずれも好きでない人の人数 $n(\overline{A \cap B})$ は

$$\begin{aligned} n(\overline{A \cap B}) &= n(\overline{A \cup B}) \\ &= 101-n(A \cup B) \\ &= 101-50 \\ &= 51 \end{aligned}$$

となる。

(v)

L, D を各 1 個、O, N を各 2 個並び替えるとき、その順列は

$$\frac{6!}{1!1!2!2!}=180 \text{通り}$$

ある。

(vi)

$$\begin{aligned} \frac{2}{3+2i} &= \frac{2(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} \\ &= \frac{6}{13}-\frac{4}{13}i \end{aligned}$$

であるから、 $\frac{2}{3+2i}$ の虚部は $-\frac{4}{13}$ である。

(vii)

$$\sqrt{3} \cos \theta-\sin \theta=2 \cos \left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

であるから、 θ が実数全体を動くとき最小値は -2 となる。

(viii)

$2^a=k$ とおくと、 $a=\frac{\log _9 25}{\log _3 2}$ のとき

$$\begin{aligned} a &= \frac{2 \log _9 5}{\log _3 2} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{\log _3 5}{\log _3 9}}{\log _3 2} \\ &= \frac{\log _3 5}{\log _3 2} \\ &= \log _2 5 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} 2^a &= k \\ \Leftrightarrow a &= \log _2 k \\ \Leftrightarrow \log _2 5 &= \log _2 k \\ \Leftrightarrow k &= 5 \end{aligned}$$

となる。

(ix)

すべての自然数 k に対して

$$\frac{3}{(3 k-1)(3 k+2)}=\frac{1}{3 k-1}-\frac{1}{3 k+2}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{3}{2 \cdot 5}+\frac{3}{5 \cdot 8}+\frac{3}{8 \cdot 11}+\cdots+\frac{3}{(3 n-1)(3 n+2)} \\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3 n-1}-\frac{1}{3 n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{3 n+2} \\ &= \frac{3 n}{6 n+4} \end{aligned}$$

となる。

(x)

2 つの 2 次方程式 $x^2+2 a x+10=0, x^2+5 x+4 a=0$ が異なるとき

$$2 a \neq 5 \text { かつ } 10 \neq 4 a$$

$$\Leftrightarrow a \neq \frac{5}{2}$$

である。これらの方程式が共通の解を持つとき、その解を α とおくと

$$\begin{cases} \alpha^2+2 a \alpha+10=0 \\ \alpha^2+5 \alpha+4 a=0 \end{cases}$$

が成り立つ。このとき

$$\begin{aligned} (2 a-5) \alpha+10-4 a &= 0 \\ \Leftrightarrow (2 a-5)(\alpha-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &= 2\left(\because a \neq \frac{5}{2}\right) \end{aligned}$$

となるから、共通の解は $x=2$ である。このとき、方程式に代入して

$$\begin{aligned} 4 a+14 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

となる。

II.
(i)

円Cの中心A(1,1)と直線lの距離をdとおくと

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

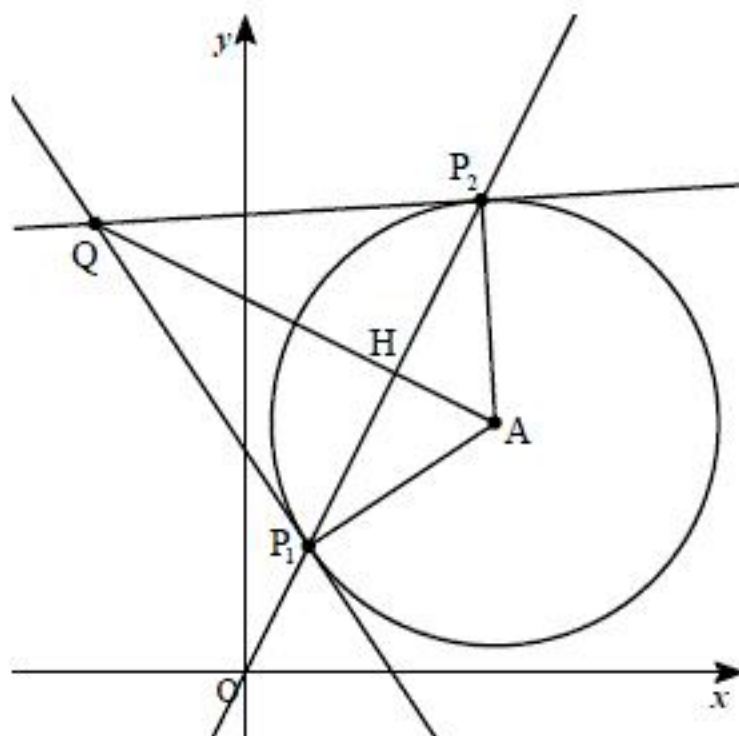
であり、円Cと直線lが2つの交点を持つとき

$$r > d = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

となる。

(答) $r > \frac{1}{\sqrt{5}}$

(ii)



円と接線の関係より

$$\angle AP_1Q = \frac{\pi}{2}, \angle AP_2Q = \frac{\pi}{2}$$

となるから、四角形AP₁QP₂の内角について

$$\begin{aligned} \angle AP_1Q + \angle P_1QP_2 + \angle AP_2Q + \angle P_1AP_2 &= 2\pi \\ \Leftrightarrow \angle P_1QP_2 + \angle P_1AP_2 &= \pi \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。ここで、AP₁=AP₂より△AP₁P₂は二等辺三角形であるから、点Aから直線l(P₁P₂)に下ろした垂線の足をHとおくと、AHは∠P₁AP₂の二等分線となる。さらに、①、AH=dと(i)の結果を用いて

$$\begin{aligned} AH &= AP_1 \cos \angle P_1AH \\ \Leftrightarrow d &= r \cos \frac{1}{2} \angle P_1AP_2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} &= r \cos \frac{1}{2} (\pi - \angle P_1QP_2) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。よって、∠P₁QP₂= $\frac{\pi}{3}$ のとき、②より

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} &= r \cos \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} &= r \cdot \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

となる。

(答) $r = \frac{2}{\sqrt{5}}$

(iii)

∠P₁QP₂=θ(0<θ<π)のとき、②より

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} &= r \cos \frac{1}{2} (\pi - \theta) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} &= r \sin \frac{\theta}{2} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{1}{\sqrt{5} \sin \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

となる。

(答) $r = \frac{1}{\sqrt{5} \sin \frac{\theta}{2}}$

(iv)

点Qの座標を(X,Y)とおく。図形の対称性より、点Qは点Aを通る直線lに垂直な直線

$$y = -\frac{1}{2}(x-1)+1$$

上に存在するから

$$Y = -\frac{1}{2}(X-1)+1 \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。また、図形の対称性より直線AQは∠P₁QP₂の二等分線であり、△AP₁Qは

∠AP₁Q= $\frac{\pi}{2}$ の直角三角形であるから、(iii)の結果を用いて

$$\begin{aligned} AP_1 &= AQ \sin \frac{1}{2} \angle P_1QP_2 \\ \Leftrightarrow r &= AQ \sin \frac{\theta}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5} \sin \frac{\theta}{2}} &= AQ \sin \frac{\theta}{2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{5} AQ \sin^2 \frac{\theta}{2} &= 1 \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} 5AQ^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow 5 \left\{ (X-1)^2 + (Y-1)^2 \right\} \sin^4 \frac{\theta}{2} &= 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。③より

$$\begin{aligned} 5 \left\{ (X-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}X + \frac{1}{2} \right)^2 \right\} \sin^4 \frac{\theta}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow 5 \left\{ \frac{5}{4}(X-1)^2 \right\} \left(\frac{1-\cos \theta}{2} \right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{5}{2}(X-1) \frac{1-\cos \theta}{2} &= \pm 1 \\ \Leftrightarrow X &= 1 \pm \frac{4}{5(1-\cos \theta)} \end{aligned}$$

となる。ここで、点Aはy<2xを満たす領域に存在するから、点Qはy>2xを満たす領域に存在し、このときX<1となるから

$$\begin{aligned} X &= 1 - \frac{4}{5(1-\cos \theta)} \\ &= \frac{1-5 \cos \theta}{5(1-\cos \theta)} \end{aligned}$$

である。このとき③より

$$\begin{aligned} Y &= \frac{2}{5(1-\cos \theta)} + 1 \\ &= \frac{7-5 \cos \theta}{5(1-\cos \theta)} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\left(\frac{1-5 \cos \theta}{5(1-\cos \theta)}, \frac{7-5 \cos \theta}{5(1-\cos \theta)} \right)$

III.

(i)

$$f(x) = -x^3 + px^2 + qx - 1 \qquad \dots \textcircled{1}$$

であるとき

$$f'(x) = -3x^2 + 2px + q \qquad \dots \textcircled{2}$$

となる。 $f(x)$ が $x = \pm\sqrt{2}$ で極値をとるとき、 $x = \pm\sqrt{2}$ は方程式 $f'(x) = 0$ の解となるから、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = \frac{2p}{3} \\ \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) = -\frac{q}{3} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow (p, q) = (0, 6)$$

となる。このとき

$$x < -\sqrt{2}, \sqrt{2} < x \text{ のとき } f'(x) < 0$$
$$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \text{ のとき } f'(x) > 0$$

を満たすから、確かに $f(x)$ は $x = \sqrt{2}$ で極大値、 $x = -\sqrt{2}$ で極小値を持つ。

(答) $p = 0, q = 6$

(ii)

(i)の結果を用いて

$$f(x) = -x^3 + 6x - 1$$
$$f'(x) = -3x^2 + 6$$

となるから、点 $P(t, f(t))$ における曲線 $C: y = f(x)$ の接線 l の方程式は

$$y = (-3t^2 + 6)(x - t) - t^3 + 6t - 1$$
$$\Leftrightarrow y = (-3t^2 + 6)x + 2t^3 - 1$$

である。

(答) $y = (-3t^2 + 6)x + 2t^3 - 1$

(iii)

曲線 C と接線 l の交点の x 座標は

$$-x^3 + 6x - 1 = (-3t^2 + 6)x + 2t^3 - 1$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 3t^2x + 2t^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - t)^2(x + 2t) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = t, -2t$$

となるから、このうち点 P とは異なる交点 Q の x 座標は $-2t$ であり、 y 座標は

$$f(-2t) = 8t^3 - 12t - 1$$

である。

(答) $Q(-2t, 8t^3 - 12t - 1)$

(iv)

点 Q の y 座標を $g(t)$ とおくと

$$g'(t) = 24t^2 - 12$$
$$= 12(\sqrt{2}t - 1)(\sqrt{2}t + 1)$$

となるから、 $t > 0$ における関数 $g(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...
$g'(t)$		-	0	+
$g(t)$		$\searrow$		$\nearrow$

よって、点 Q の y 座標 $g(t)$ は

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき最小値 } g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -4\sqrt{2} - 1$$

をとる。さらに、このときの点 Q の x 座標は

$$-2t = -\sqrt{2}$$

である。

(答) $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、 $Q(-\sqrt{2}, -4\sqrt{2} - 1)$

(v)

点 Q_n の x 座標を X_n とおく。ここで、(ii), (iii)の導出過程は t が実数全体を動くときにおいても成立するから、(iii)の結果より

$$X_{n+1} = -2X_n$$

となる。よって

$$X_n = X_1 \cdot (-2)^{n-1}$$
$$= -\sqrt{2} \cdot (-2)^{n-1}$$
$$= (-1)^n 2^{n-\frac{1}{2}}$$

であるから

$$n \text{ が奇数のとき } X_n < 0$$
$$n \text{ が偶数のとき } X_n > 0$$

となる。よって、 X_n が初めて $1,000,000 = 10^6$ を超えるような n は偶数であり、このとき

$$X_n = 2^{n-\frac{1}{2}}$$

となるから、これを満たす n の値は

$$2^{n-\frac{1}{2}} > 10^6$$
$$\Leftrightarrow \left(n - \frac{1}{2}\right) \log_{10} 2 > 6$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{2} + \frac{6}{\log_{10} 2}$$

である。 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とすると

$$\frac{1}{2} + \frac{6}{\log_{10} 2} = 20.43\dots$$

であるから、求める n の値はこれより大きい最小の偶数であり

$$n = 22$$

となる。

(答) $n = 22$