

II

(i)

$\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{OB} = \vec{b}$, $\overline{OC} = \vec{c}$ とおくと,

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = 0, \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \\ |\vec{a}|^2 = a^2, |\vec{b}|^2 = b^2, |\vec{c}|^2 = c^2 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。 $\overline{OH}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表すと,

$$\begin{aligned} \overline{OH} &= \overline{OC} + \overline{CH} \\ &= \overline{OC} + p\overline{CA} + q\overline{CB} \\ &= p\vec{a} + q\vec{b} + (1-p-q)\vec{c} \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。ここで $\overline{OH} \perp \overline{CA}$, $\overline{OH} \perp \overline{CB}$ なので,

$$\begin{aligned} \overline{OH} \cdot \overline{CA} &= \overline{OH} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0 \\ \Leftrightarrow \{p\vec{a} + q\vec{b} + (1-p-q)\vec{c}\}(\vec{a} - \vec{c}) &= 0 \quad (\because \textcircled{2}) \\ \Leftrightarrow p|\vec{a}|^2 + q\vec{a} \cdot \vec{b} + (1-p-q)\vec{c} \cdot \vec{a} + p\vec{c} \cdot \vec{a} + q\vec{b} \cdot \vec{c} - (1-p-q)|\vec{c}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow pa^2 - (1-p-q)c^2 &= 0 \quad (\because \textcircled{1}) \\ \Leftrightarrow p(a^2 + c^2) + qc^2 - c^2 &= 0 \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{OH} \cdot \overline{CB} &= \overline{OH} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0 \\ \Leftrightarrow \{p\vec{a} + q\vec{b} + (1-p-q)\vec{c}\}(\vec{b} - \vec{c}) &= 0 \quad (\because \textcircled{2}) \\ \Leftrightarrow p\vec{a} \cdot \vec{b} + q|\vec{b}|^2 + (1-p-q)\vec{b} \cdot \vec{c} + q\vec{c} \cdot \vec{a} + q\vec{b} \cdot \vec{c} - (1-p-q)|\vec{c}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow qb^2 - (1-p-q)c^2 &= 0 \quad (\because \textcircled{1}) \\ \Leftrightarrow pc^2 + q(b^2 + c^2) - c^2 &= 0 \quad \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

③, ④から q を取り除く。

③ $\times (b^2 + c^2) - \textcircled{4} \times c^2$ として,

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow p\{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2) - c^4\} - \{c^2(b^2 + c^2) - c^4\} &= 0 \\ \Leftrightarrow p(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - b^2c^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$p = \frac{b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

となる。対称性より q も同様に求められ,

$$q = \frac{a^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

$$(\text{答}) \quad p = \frac{b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

$$q = \frac{a^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

(ii)

h_3 を求めるには z 座標だけを考えればよい。

$$\begin{aligned} \overline{OH} &= \overline{OC} + \overline{CH} \\ &= p\vec{a} + q\vec{b} + (1-p-q)\vec{c} \\ &= p \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + (1-p-q) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned} h_3 &= (1-p-q)c \\ &= \frac{a^2b^2c}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad h_3 = \frac{a^2b^2c}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

(iii)

h_3 を c の関数と見れば,

$$h_3(c) = \frac{a^2b^2c}{a^2b^2 + (a^2 + b^2)c^2}$$

と書ける。 h_3 は正なので, a と b を固定して c を正の実数全体で動かすとき, h_3 が最大となる

c の値は $\frac{1}{h_3(c)}$ が最小値をとるときの c の値に等しい。よって, $\frac{1}{h_3(c)}$ の最小値を求めると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_3(c)} &= \frac{a^2b^2 + (a^2 + b^2)c^2}{a^2b^2c} \\ &= \frac{1}{c} + \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}c \end{aligned}$$

$a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ より, 相加相乗平均の関係から,

$$\frac{1}{c} + \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}c \geq \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$$

となる。ただし, 等号成立は,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} &= \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}c \\ \therefore c &= \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\because c > 0) \end{aligned}$$

よって, $c = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ のとき $\frac{1}{h_3(c)}$ は最小となる。

したがって, h_3 は $c = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ のとき最大値 $\frac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ⅲ

(i)

$$f(x) = (3x^2 + 4x - 1)e^{-x} + 1$$

$$f'(x) = (-3x^2 - 4x + 1 + 6x + 4)e^{-x}$$

$$= -(3x^2 - 2x - 5)e^{-x}$$

$$= -(3x - 5)(x + 1)e^{-x}$$

$$f''(x) = (3x^2 - 2x - 5 - 6x + 2)e^{-x}$$

$$= (3x^2 - 8x - 3)e^{-x}$$

$$= (3x + 1)(x - 3)e^{-x}$$

よって増減表は次のようになる。

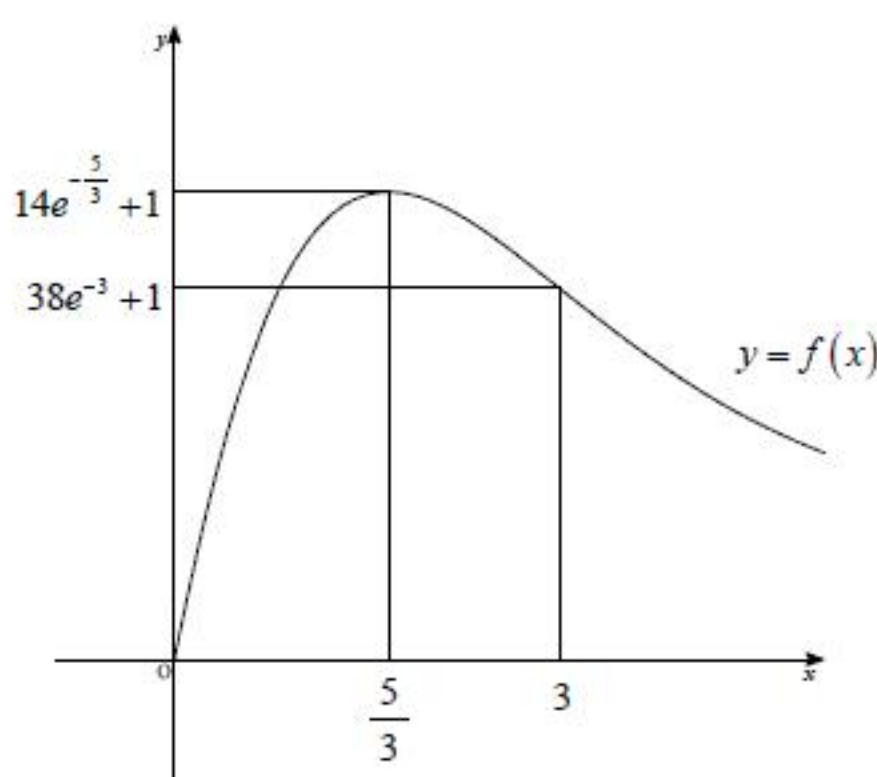
x	0	...	$\frac{5}{3}$	...	3	...	∞
$f'(x)$		+	0	-	-	-	
$f''(x)$		-	-	-	0	+	
$f(x)$	$f(0)$	↗	$f\left(\frac{5}{3}\right)$	↘	$f(3)$	↘	

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{5}{3}\right) = 14e^{-\frac{5}{3}} + 1, \quad f(3) = 38e^{-3} + 1$$

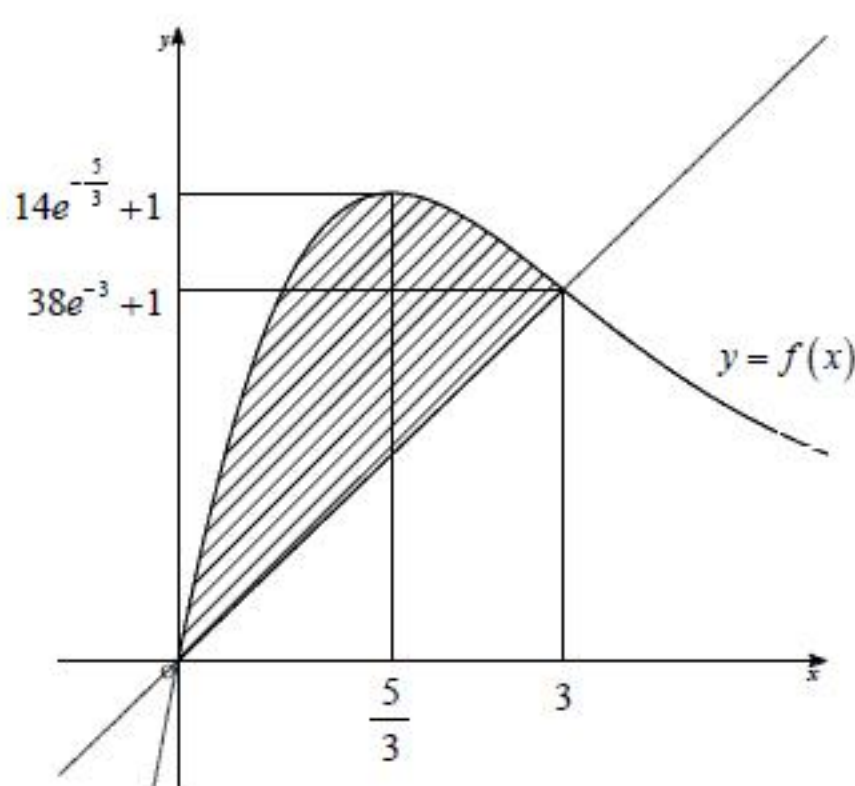
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 e^{-x} + 4x e^{-x} - e^{-x} + 1) = 1$$

より、 $x = \frac{5}{3}$ のとき極大値 $14e^{-\frac{5}{3}} + 1$ をとり、変曲点は点 $(3, 38e^{-3} + 1)$ である。

よって、グラフは次のようになる(答)。



(ii)



求める面積は前図の斜線部分である。この求める面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \left(f(x) - \frac{38e^{-3} + 1}{3}x \right) dx \\ &= \int_0^3 \left((3x^2 + 4x - 1)e^{-x} - \frac{38e^{-3} + 1}{3}x + 1 \right) dx \\ &= \left[(-3x^2 - 10x - 9)e^{-x} - \frac{38e^{-3} + 1}{6}x^2 + x \right]_0^3 \\ &= -66e^{-3} - 57e^{-3} - \frac{3}{2} + 3 + 9 \\ &= -123e^{-3} + \frac{21}{2} \end{aligned}$$

(答) $-123e^{-3} + \frac{21}{2}$