

I

ア	5	イ	$2\sqrt{2}-2$	ウ	8	エ	96	オ	9	カ	$-i$
キ	(2,2)	ク	$6\sqrt{6}$	ケ	$1-\sqrt{3}$	コ	8	サ	3	シ	$3^{n-1}+1$

(i)

分母を有理化すると、

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=3+2\sqrt{2}$$

となる。ここで

$$2<2\sqrt{2}=\sqrt{8}<3$$

$$\therefore 5<3+2\sqrt{2}<6$$

であるから

$$a=5$$

であることが分かり、また

$$b=3+2\sqrt{2}-a=2\sqrt{2}-2$$

となる。

(ii)

2 解を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{a}{4}, \quad \alpha\beta=\frac{3}{4}$$

が成り立つ。また、2 解の差が 1 であるから

$$\beta-\alpha=1$$

$$(\beta-\alpha)^2=1$$

$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1$$

$$\frac{a^2}{16}-3=1$$

$$a^2=64$$

$$a=8 \quad (\because a>0)$$

となる。

(iii)

千の位に 0 を使えないことを考慮すると

$$4\times 4\times 3\times 2=96(\text{通り})$$

となる。

(iv)

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)=ab+\frac{4}{ab}+5$$

条件より

$$a>0, b>0$$

であるから

$$ab>0$$

となる。よって、相加相乗平均の関係を使うと

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right) &\geq 2\sqrt{ab\times\frac{4}{ab}}+5 \\ &=9\end{aligned}$$

が成り立つ（等号成立は $ab=2$ のとき）。したがって、最小値は 9 となる。

(v)

計算すると

$$\begin{aligned}\left(\frac{2+2i}{2-2i}\right)^3 &= \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 \\ &= \left\{\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right\}^3 \\ &= i^3 \\ &= -i\end{aligned}$$

となる。

(vi)

直線 l の傾きは $\frac{1}{2}$ であるから、直線 m の傾きは -2 となる。したがって直線 m の方程式は

$$\begin{aligned}y &= -2(x-1)+4 \\ &= -2x+6\end{aligned}$$

となる。よって直線 l と m の交点の座標は

$$\begin{cases} x-2y+2=0 \\ y=-2x+6 \end{cases}$$

を解いて

$$(2,2)$$

となる。

(vii)

$$s=\frac{5+6+7}{2}=9$$

とおくと、ヘロンの公式より求める面積は

$$\sqrt{s(s-5)(s-6)(s-7)}=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}=6\sqrt{6}$$

となる。

(viii)

真数条件より

$$2-x>0 \quad \text{かつ} \quad x+1>0$$

が成り立つので、 x の範囲は

$$-1< x < 2$$

となる。方程式を変形すると

$$\log_{\sqrt{2}}(2-x)+\log_2(x+1)=1$$

$$\frac{\log_2(2-x)}{\log_2\sqrt{2}}+\log_2(x+1)=1$$

$$2\log_2(2-x)+\log_2(x+1)=1$$

$$\log_2(2-x)^2(x+1)=\log_2 2$$

$$(2-x)^2(x+1)=2$$

$$x^3-3x^2+2=0$$

$$(x-1)(x^2-2x-2)=0$$

となる。 $-1< x < 2$ の範囲で、この方程式を解くと

$$x=1, 1-\sqrt{3}$$

を得る。

(ix)

$f(x)$ を x で微分すると

$$f'(x)=6x^2-6x$$

$$=6x(x-1)$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は下のようになる。

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$	0	—	0	+	
$f(x)$	4	↘	3	↗	8

したがって、最大値は 8、最小値は 3 となる。

(x)

$$a_{n+1}=3a_n-2$$

$$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$$

であるから、 $b_n=a_n-1$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ は

$$\text{初項 } b_1=a_1-1=1, \text{ 公比 } 3$$

の等比数列となる。したがって

$$b_n=3^{n-1}$$

$$\therefore a_n=3^{n-1}+1$$

となる。

II

(i)

直線 l の方程式は

$$\sqrt{3}x + y - 3 = 0$$

である。また、円 C_1 の中心を $P_1(0, p)$ ($0 < p < 3$) とおく。円 C_1 は x 軸と直線 l に接するので、点 P_1 から x 軸までの距離と点 P_1 から直線 l までの距離は等しくなる。よって、点と直線の距離の公式より、

$$p = \frac{|\sqrt{3} \times 0 + p - 3|}{\sqrt{3+1}}$$

$$2p = |p - 3|$$

となる。さらに、両辺を 2 乗して

$$4p^2 = p^2 - 6p + 9$$

$$3(p-1)(p+3) = 0$$

$$p = 1 \quad (\because 0 < p < 3)$$

を得る。よって、円 C_1 の方程式と直線 l の方程式はそれぞれ

$$C_1: x^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$l: y = -\sqrt{3}x + 3$$

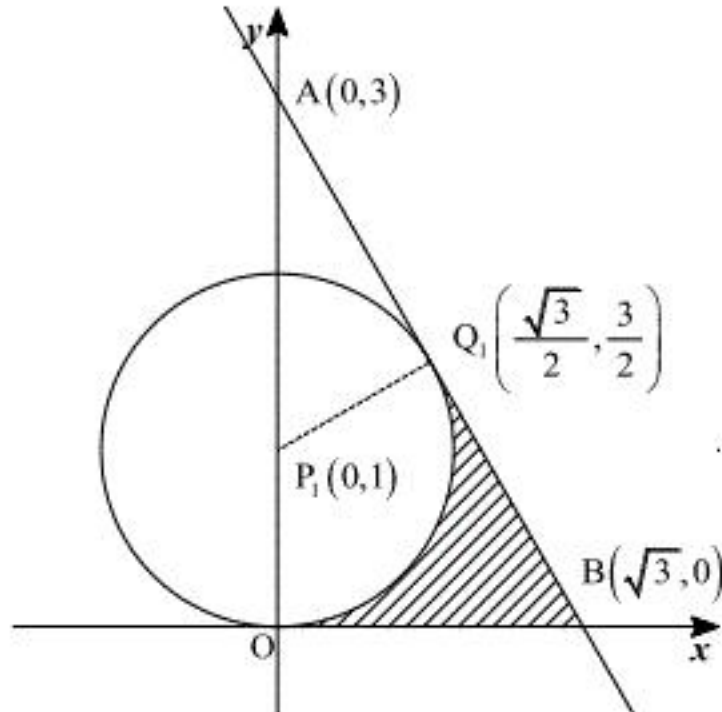
となる。これらの方程式を連立させて解くと、求める接点(Q_1 とおく)の座標は

$$Q_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

となる。

$$\text{答} \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

(ii)



領域 D は上図斜線部であり、その面積を S とすると

$$S = (\triangle OP_1B \text{ の面積}) + (\triangle Q_1P_1B \text{ の面積}) - (\text{扇形 } P_1OQ_1 \text{ の面積})$$

となる。ここで、

$$Q_1B = \sqrt{\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{3} = OB$$

$$OP_1 = P_1Q_1 = 1$$

であり、3 辺の長さが等しいことから

$$\triangle OP_1B \cong \triangle Q_1P_1B$$

が成り立つ。さらに、

$$\angle OAB = 30^\circ, \angle P_1Q_1A = 90^\circ$$

であるから

$$\begin{aligned} \angle OP_1Q_1 &= 180^\circ - \angle AP_1Q_1 \\ &= 180^\circ - (180^\circ - \angle P_1AQ_1 - \angle P_1Q_1A) \\ &= 120^\circ \end{aligned}$$

となる。よって求める面積は

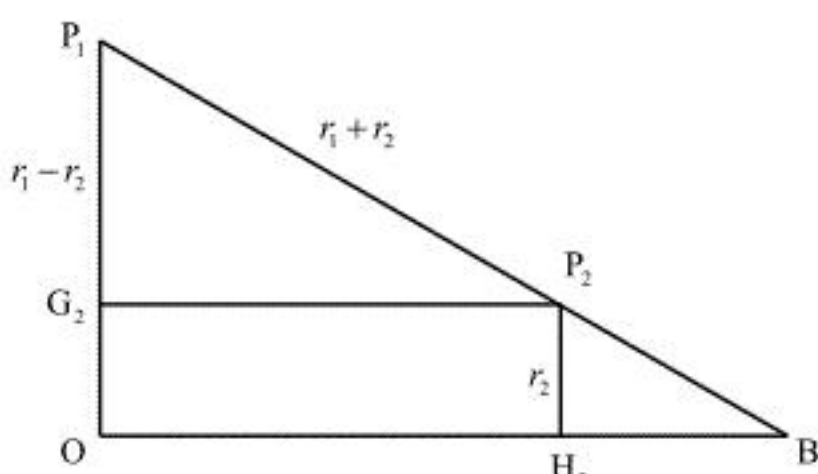
$$\begin{aligned} S &= 2 \times (\triangle OP_1B \text{ の面積}) - (\text{扇形 } P_1OQ_1 \text{ の面積}) \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1\right) - \left(\pi \times 1^2 \times \frac{120}{360}\right) \\ &= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{答} \quad \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

(iii)

円 C_1 の半径を $r_1 = 1$ とおき、円 C_2 の中心と半径をそれぞれ P_2, r_2 とおく。さらに、 P_2 から x 軸におろした垂線の足を H_2 、 P_2 から y 軸におろした垂線の足を G_2 とおく。 P_2 は $\angle OBA$ の二等分線上、つまり線分 BP_1 上にあることから、下図のような位置関係となる。



ここで、

$$\triangle OP_1B \sim \triangle G_2P_1P_2$$

が成り立つことから、

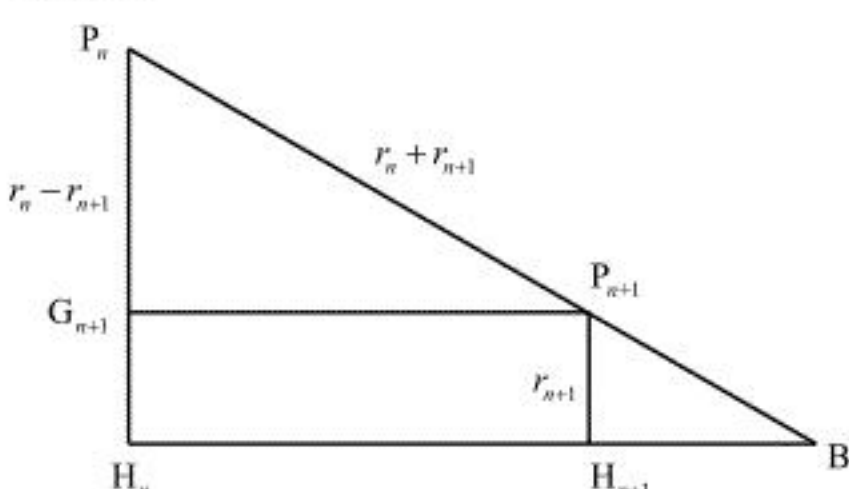
$$\begin{aligned} P_1G_2 : P_1P_2 &= P_1O : P_1B = 1 : 2 \\ r_1 - r_2 : r_1 + r_2 &= 1 : 2 \\ \therefore r_2 &= \frac{1}{3}r_1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{答} \quad \frac{1}{3}$$

(iv)

(iii) の議論を一般化して考える。円 C_{n+1}, C_n の中心と半径をそれぞれ $P_{n+1}, P_n, r_{n+1}, r_n$ とおく。さらに、 P_{n+1}, P_n から x 軸におろした垂線の足をそれぞれ H_{n+1}, H_n とおき、 P_{n+1} から線分 P_nH_n におろした垂線の足を G_{n+1} とおく。(iii) と同様に考えると、 P_{n+1}, P_n は線分 BP_1 上にあるので、下図のような位置関係にある。



$\triangle OP_nB \sim \triangle G_{n+1}P_nP_{n+1}$ であることから、

$$\begin{aligned} P_nG_{n+1} : P_nP_{n+1} &= P_n - r_{n+1} : r_n + r_{n+1} = 1 : 2 \\ \therefore r_{n+1} &= \frac{1}{3}r_n \end{aligned}$$

を得る。よって、数列 $\{r_n\}$ は初項 $r_1 = 1$ 、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列となるので

$$r_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

である。以上より、求める面積の和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \pi r_k^2 &= \pi \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1} \\ &= \frac{9}{8} \left\{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right\} \pi \end{aligned}$$

となる。

$$\text{答} \quad \frac{9}{8} \left\{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right\} \pi$$

Ⅲ

(i)

△OBD は正三角形であり、1 辺の長さは $OB=2$ である。よって、D の座標は

$$(2\cos 60^\circ, 2\sin 60^\circ, 0) = (1, \sqrt{3}, 0)$$

である。

答 $(1, \sqrt{3}, 0)$

(ii)

正六角形の 1 辺の長さは

$$BC = \frac{OB}{\tan 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

であるので、点 A, C, E を z 軸の正の方向へ平行移動させた距離を $a(>0)$ とすると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BQ} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ} \\ &= \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, a\right)\end{aligned}$$

である。BQ の長さが 2 であるので、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BQ}|^2 &= 4 \\ \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + a^2 &= 4\end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad (\because a > 0)$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BQ} \\ &= \left(2, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\end{aligned}$$

である。

答 $\left(2, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

(iii)

点 G は△BQD の重心なので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OD}) \\ &= \left(\frac{5}{3}, \frac{5\sqrt{3}}{9}, \frac{2\sqrt{6}}{9}\right)\end{aligned}$$

である。よって、OG の長さは

$$|\overrightarrow{OG}| = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{9}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{9}\right)^2} = 2$$

である。

答 2

(iv)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) \\ \overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ER} = \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\end{aligned}$$

であり、点 T は線分 PR の中点なので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR}) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) \\ |\overrightarrow{OT}| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{TQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OT} = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \\ |\overrightarrow{TQ}| &= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{TQ} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{TQ}}{|\overrightarrow{OT}| |\overrightarrow{TQ}|} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

を得る

答 $\frac{1}{3}$