

I
(i) 全ての n に対し, $a_n > 0$ であることは, $a_1 > \sqrt{p} > 0$ 漸化式から帰納的に示すことができる.

従って, 全ての n に対し, $a_n > 0$ かつ $\frac{p}{a_n} > 0$ である.

よって, 相加平均・相乗平均の関係から,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{p}{a_n} \right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{p}{a_n}} = \sqrt{p} \quad \dots \textcircled{1}$$

(等号成立は, $a_n = \frac{p}{a_n}$ 即ち, $a_n = \sqrt{p}$ のとき)

従って, 全ての n に対し, $a_{n+1} \geq \sqrt{p}$

また, 条件より $a_1 \geq \sqrt{p}$

ゆえに, 示された.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad a_{n+1}^2 - p &= \frac{1}{4} \left(a_n + \frac{p}{a_n} \right)^2 - p \\ &= \frac{1}{4} \left(a_n^2 + 2p + \frac{p^2}{a_n^2} \right) - p \\ &= \frac{1}{4} (a_n^2 - p) - \frac{3}{4} p + \frac{1}{2} p + \frac{p^2}{4a_n^2} \\ &= \frac{1}{4} (a_n^2 - p) - \frac{p}{4a_n^2} (a_n^2 - p) \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{p}{4a_n^2} \right) (a_n^2 - p) \\ &= \frac{1}{4a_n^2} (a_n^2 - p)^2 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

ここで, (i) より, $a_n^2 \geq p$ つまり, $\frac{1}{4a_n^2} \leq \frac{1}{4p}$

従って,

$$\frac{1}{4a_n^2} (a_n^2 - p)^2 \leq \frac{1}{4p} (a_n^2 - p)^2$$

これと②より,

$$a_{n+1}^2 - p \leq \frac{1}{4p} (a_n^2 - p)^2$$

これを繰り返し用いると,

$$a_{n+1}^2 - p \leq \left(\frac{1}{4p} \right)^{2^n - 1} (a_1^2 - p)^{2^n} \quad \dots \textcircled{3}$$

が示される.

また, 等号成立条件は, ①より, $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \sqrt{p}$ であるが,

これは, $a_1 > \sqrt{p}$ より, あり得ない.

(iii) ③で, $a_1 = 4, p = 15, n = 2$ とすると,

$$a_3^2 - 15 \leq \left(\frac{1}{60} \right)^3 (16 - 15)^4 = \frac{1}{216000}$$

よって, $(0 <) a_3 \leq \sqrt{\frac{1}{216000} + 15}$

従って, $a_3 - \sqrt{15} \leq \sqrt{\frac{1}{216000} + 15} - \sqrt{15} \quad \dots \textcircled{4}$

ここで, ④の右边が $\frac{1}{10^5}$ より小さいことを示せばよい.

$$\begin{aligned} \text{(④の右边)} &= \frac{\sqrt{216000 \times 15 + 1} - \sqrt{216000 \times 15}}{\sqrt{216000}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{216000} (\sqrt{216000 \times 15 + 1} + \sqrt{216000 \times 15})} \\ &< \frac{1}{\sqrt{216000} \times 2\sqrt{216000 \times 15}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{216000 \times 216000 \times 15 \times 4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{279.936 \times 10^{10}}} \\ &< \frac{1}{10^5} \end{aligned}$$

ゆえに, ④より, $a_3 - \sqrt{15} < \frac{1}{10^5} \quad \dots \text{(答)}$

(iv) $a_1 = 4, p = 15$ のとき

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(4 + \frac{15}{4} \right) = \frac{31}{8}$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{31}{8} + 15 \times \frac{8}{31} \right) = \frac{1921}{496} = 3.87298 \dots$$

従って, (iii) より, $\sqrt{15} > a_3 - \frac{1}{10^5} = 3.87297 \dots$

また, (i) より, $\sqrt{15} \leq a_3 = 3.87298 \dots$

よって, $3.87297 \dots < \sqrt{15} \leq 3.87298 \dots$

であるから,

$\sqrt{15}$ の近似値は, 3.8730 である. $\dots \text{(答)}$

(i) 正弦定理より

$$AC = 2R \sin \beta \quad \cdots \quad ①$$

$$BC = 2R \sin \alpha \quad \cdots \quad ②$$

$$\begin{aligned} AB &= 2R \sin \gamma \\ &= 2R \sin(\pi - \alpha - \beta) \\ &= 2R \sin(\alpha + \beta) \quad \cdots \quad ③ \end{aligned}$$

また、条件より、

$$AB + BC + CA = 1 \quad \cdots \quad ④$$

④に①、②、③を代入して、

$$2R \sin(\alpha + \beta) + 2R \sin \alpha + 2R \sin \beta = 1$$

ここで、(右辺)=1より、 $\sin(\alpha + \beta) + \sin \alpha + \sin \beta \neq 0$ であるから、

$$R = \frac{1}{2\{\sin(\alpha + \beta) + \sin \alpha + \sin \beta\}} \quad \cdots \quad (\text{答})$$

(ii) $R > 0$ より、(i)の答の分母 >0 だから、

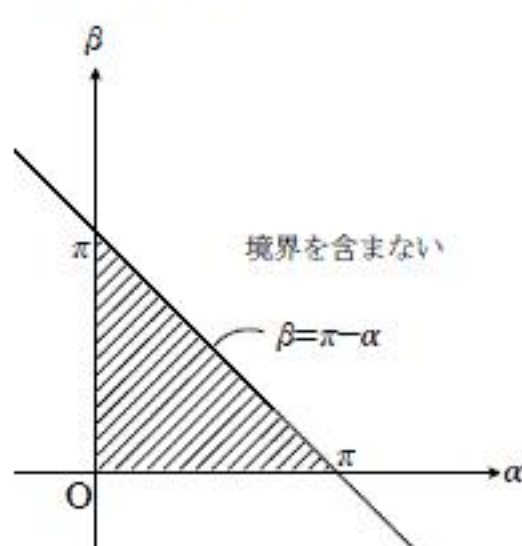
この分母が最大となるときについて考えればよい。

この分母を $f(\alpha, \beta)$ とおく。

三角形の内角の条件より、

$$\begin{cases} 0 < \alpha < \pi \\ 0 < \beta < \pi \\ 0 < \pi - \alpha - \beta < \pi \end{cases}$$

$\alpha\beta$ 平面に図示すると、



よって α を固定するとき、 $0 < \beta < \pi - \alpha$ で考えればよい

$f(\alpha, \beta)$ を β で微分して、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} f(\alpha, \beta) &= 2\{\cos(\alpha + \beta) + \cos \beta\} \\ &= 4 \cos \frac{\alpha + 2\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

ここで、 $\frac{d}{d\beta} f(\alpha, \beta) = 0$ のとき、 $\cos \frac{\alpha + 2\beta}{2} = 0$ である。

$0 < \frac{\alpha + 2\beta}{2} < \pi$ より、 $\cos \frac{\alpha + 2\beta}{2} = 0$ のとき、 $\frac{\alpha + 2\beta}{2} = \frac{\pi}{2}$

つまり

$$\beta = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

従って、増減表は次のようになる。

β	0	$\cdots$	$\frac{\pi - \alpha}{2}$	$\cdots$	$\pi - \alpha$
$\frac{d}{d\beta} f(\alpha, \beta)$	$\times$	+	0	-	$\times$
$f(\alpha, \beta)$	$\times$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\times$

$$\begin{aligned} \text{極大値は } f\left(\alpha, \frac{\pi - \alpha}{2}\right) &= 2\left(\sin \frac{\pi + \alpha}{2} + \sin \alpha + \sin \frac{\pi - \alpha}{2}\right) \\ &= 2\left(\sin \alpha + 2 \cos \frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

であり、これが $f(\alpha, \beta)$ の β に関する最大値であるから、

$$R(\alpha) = \frac{1}{2\left(\sin \alpha + 2 \cos \frac{\alpha}{2}\right)} \quad \cdots \quad (\text{答})$$

(iii) $R(\alpha) = k \iff \frac{1}{k} = 2\left(\sin \alpha + 2 \cos \frac{\alpha}{2}\right) \quad (\because R(\alpha) \neq 0)$

$g(\alpha) = 2\left(\sin \alpha + 2 \cos \frac{\alpha}{2}\right)$ とおき、

αy 平面上で、 $y = \frac{1}{k}, y = g(\alpha)$ の2グラフの共有点について考える。

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= 2\left(\cos \alpha - \sin \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 2\left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= -2\left(2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1\right)\left(\sin \frac{\alpha}{2} + 1\right) \end{aligned}$$

$0 < \alpha < \pi$ より、 $0 < \sin \frac{\alpha}{2} < 1$ なので

$g'(\alpha) = 0$ のとき

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1 = 0$$

$$\therefore \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{6} \iff \alpha = \frac{\pi}{3}$$

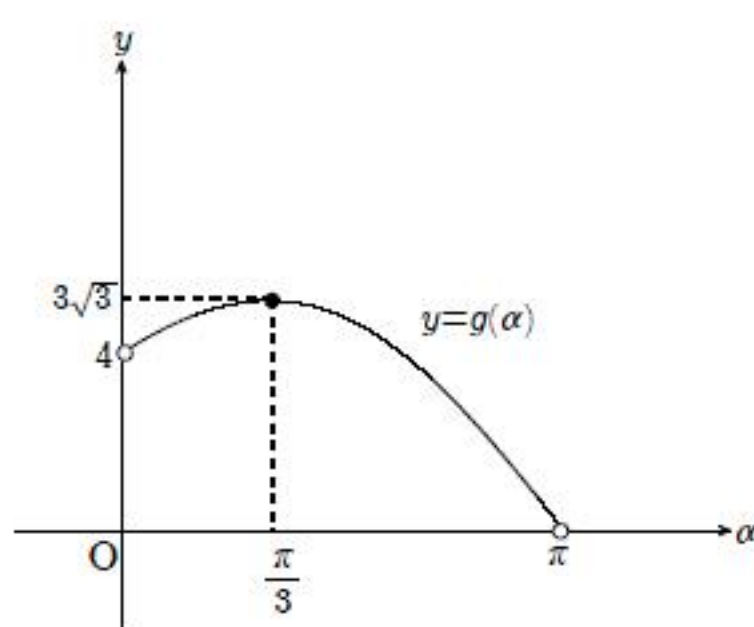
以上より、増減表は次のようになる。

α	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$g'(\alpha)$	$\times$	+	0	-	$\times$
$g(\alpha)$	$\times$	$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	$\times$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} g(\alpha) = 4$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi - 0} g(\alpha) = 0$$

よって、グラフの概形は次のようになる。



よって、

$\frac{1}{k} > 3\sqrt{3}, \frac{1}{k} \leq 0$ のとき、解なし

$\frac{1}{k} = 3\sqrt{3}, 0 < \frac{1}{k} \leq 4$ のとき、解は1個

$4 < \frac{1}{k} < 3\sqrt{3}$ のとき、解は2個

つまり、

$$\begin{cases} k < \frac{1}{3\sqrt{3}} \text{ のとき、解なし} \\ k = \frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{4} \leq k \text{ のとき、解は1個} \\ \frac{1}{3\sqrt{3}} < k < \frac{1}{4} \text{ のとき、解は2個} \end{cases} \quad \cdots \quad (\text{答})$$