

I.

【解答】

- (i) ア $\sqrt{5}-2$
(ii) イ 4 ウ 9
(iii) エ $\frac{\pi}{3}$ オ π
(iv) カ -28 キ 80
(v) ク $\frac{44}{3}$
(vi) ケ 2 コ -30
(vii) サ 5
(viii) シ 1 ス $\frac{2}{3}$
(ix) セ $2\sqrt{6}$
(x) ソ 96

【解説】

(i)

与えられた等式を変形すると、

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{1}{x^2} &= 3 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 &= 3 \\ \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} &= \sqrt{5} \left(\because x + \frac{1}{x} > 0\right) \\ \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{5}x + 1 &= 0 \left(\because 0 < x < 1\right) \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。①より、求める値は、

$$\begin{aligned}x^3 &= x\left(x^2 - \sqrt{5}x + 1\right) + \sqrt{5}x^2 - x \\ &= \sqrt{5}x^2 - x \\ &= \sqrt{5}\left(x^2 - \sqrt{5}x + 1\right) + 4x - \sqrt{5} \\ &= 4x - \sqrt{5}\end{aligned}$$

となるが、また、①より、

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \left(\because 0 < x < 1\right)$$

であるから、結局、求める値は、

$$4 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 2$$

である。

(ii)

まず、真数条件より、

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{2} > 0 \quad \text{かつ} \quad x-4 > 0 \\ \Leftrightarrow x > 4 \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

を満たすことが必要である。このとき、与えられた不等式を同値変形すると、

$$\begin{aligned}\log_5 \left\{ \frac{x+1}{2} (x-4) \right\} &< 2 \\ \Leftrightarrow \log_5 \left\{ \frac{1}{2} (x+1)(x-4) \right\} &< \log_5 25 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} (x+1)(x-4) &< 25 \left(\because \text{対数の底 } 5 > 1\right) \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x - 54 &< 0 \\ \Leftrightarrow (x+6)(x-9) &< 0 \\ \Leftrightarrow 4 < x < 9 \quad (\because \textcircled{2})\end{aligned}$$

となるから、解は $4 < x < 9$ である。

(iii)

与えられた不等式の左辺は、三角関数の合成によって、

$$\begin{aligned}&\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \right) \\ &= 2 \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{6} - \cos \theta \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= 2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right)\end{aligned}$$

と変形できるから、与えられた不等式を同値変形すると、

$$\begin{aligned}&\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta > 1 \\ \Leftrightarrow 2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) &> 1 \\ \Leftrightarrow \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) &> \frac{1}{2} \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}\end{aligned}$$

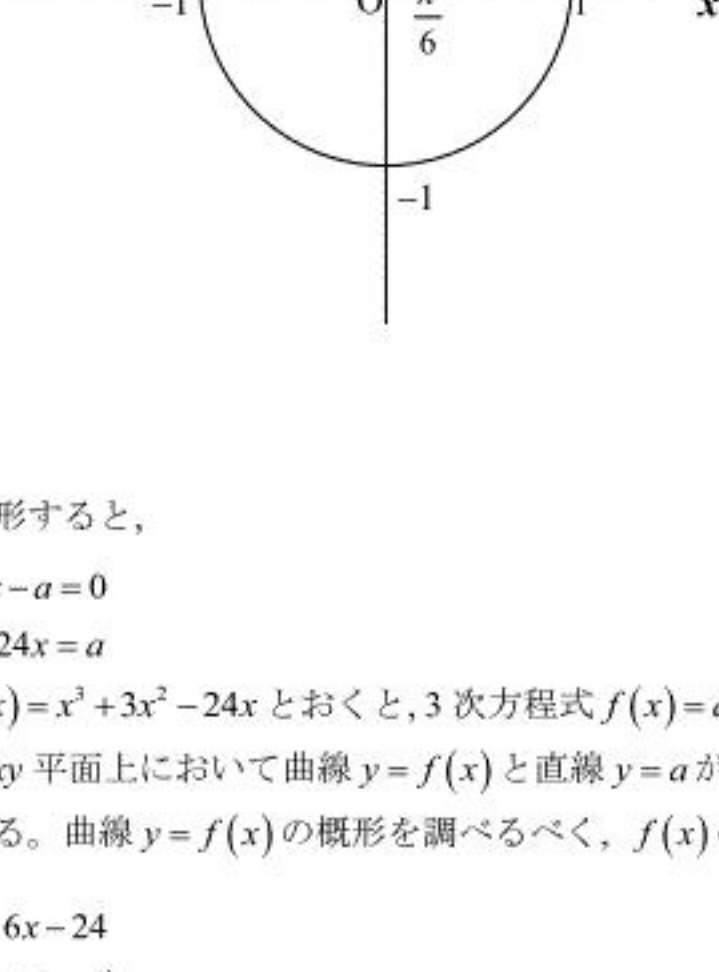
となる。したがって、

$$\begin{aligned}-\pi < \theta < \pi \\ \Leftrightarrow -\frac{7}{6}\pi < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{5}{6}\pi\end{aligned}$$

の範囲における③の解は、下図より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\pi < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{5}{6}\pi \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < \theta < \pi\end{aligned}$$

となる。



(iv)

与えられた等式を変形すると、

$$\begin{aligned}x^3 + 3x^2 - 24x - a &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 24x &= a\end{aligned}$$

となる。ここで、 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$ とおくと、3 次方程式 $f(x) = a$ が異なる 3 つの実数解をもつための条件は、 xy 平面上において曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = a$ が異なる 3 つの点で交わるような条件と一致する。曲線 $y = f(x)$ の概形を調べるべく、 $f(x)$ の導関数を計算すると、

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 + 6x - 24 \\ &= 3(x^2 + 2x - 8) \\ &= 3(x+4)(x-2)\end{aligned}$$

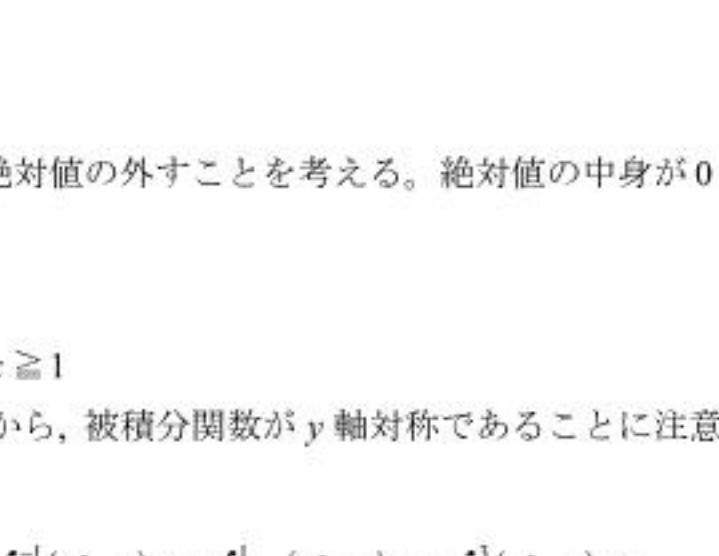
となるから、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
f'	+	0	-	0	+
f	$\nearrow$	80	$\searrow$	-28	$\nearrow$

よって、 $y = f(x)$ のグラフは次のようになるから、求める条件は、

$$-28 < a < 80$$

である。



(v)

まず、被積分関数の絶対値の外すことを考える。絶対値の中身が 0 以上になるのは、

$$\begin{aligned}x^2 - 1 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 &\geq 1 \\ \Leftrightarrow x \leq -1, \quad x &\geq 1\end{aligned}$$

を満たすときであるから、被積分関数が y 軸対称であることに注意すると、与えられた定積分は、

$$\begin{aligned}\int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx &= \int_{-3}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 -(x^2 - 1) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx \\ &= \frac{1}{6} \{ 1 - (-1)^3 \} + 2 \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^3 \\ &= \frac{44}{3}\end{aligned}$$

と計算できる。

(vi)

$f(x) = ax^2 - 4x + b$ とする。 $f(x) < 0$ の解が $-3 < x < 5$ となるためには、放物線 $y = f(x)$ が $x = -3$ と $x = 5$ のときに x 軸と交わる必要がある。すなわち、 $f(x) = 0$ の解が $x = -3, 5$ となる必要がある。また、 $f(x) < 0$ は二次不等式なので、 $a \neq 0$ となる必要がある。したがって、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} -3 + 5 = \frac{4}{a} \\ -3 \cdot 5 = \frac{b}{a} \end{cases}$$

となるから、これを計算し、

$$a = 2, \quad b = -30$$

となる。この値を代入すると、

$$\begin{aligned}2x^2 - 4x - 30 &< 0 \\ \Leftrightarrow 2(x+3)(x-5) &< 0 \\ \therefore -3 < x < 5\end{aligned}$$

となり、題意を満たすことが確認された。

(vii)

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ における内積の定義より、

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 30^\circ \\ \Leftrightarrow 2(x-2) + x + 4 &= \sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{(x-2)^2 + x^2 + 4^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow 3x &= \sqrt{6} \cdot \sqrt{2(x^2 - 2x + 10)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}\end{aligned}$$

となる。④の両辺を二乗して、

$$\begin{aligned}9x^2 &= 9(x^2 - 2x + 10) \\ \Leftrightarrow -2x + 10 &= 0 \\ \therefore x &= 5\end{aligned}$$

となる。これを $\vec{b}$ の成分に代入すると題意を満たすことが確認できる。

(viii)

与えられた式を変形すると、

$$\begin{aligned}4^x + 8^y &= 2^{2x} + 2^{3y} \\ &= 2^{2x} + 2^{3y}\end{aligned}$$

となる。 $2^{2x} > 0, 2^{3y} > 0$ なので、相加相乗平均の関係より、

$$\begin{aligned}2^{2x} + 2^{3y} &\geq 2\sqrt{2^{2x+3y}} \\ &= 2\sqrt{2^4} \\ &= 8\end{aligned}$$

となる。また、等号成立条件は、

$$\begin{aligned}&\begin{cases} 2x = 3y \\ 2x + 3y = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}\end{aligned}$$

である。

(ix)

三角形 ABC の B における角度は、

$$180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$$

であるから、正弦定理を適用することにより、

$$\frac{6}{\sin 60^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ}$$

となるため、

$$\begin{aligned}BC &= \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} \cdot 6 \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot 6 \\ &= 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

と求まる。

(x)

与えられた条件で 2 の倍数でない 4 桁の自然数が作られるための条件は、一の位が 1 または 3 であり千の位が 0 以外の数字であるような条件と一致する。千の位の選び方は 3 通り、百の位の選び方は 4 通り、十の位の選び方は 4 通り、一の位の選び方は 2 通りであるから、求める自然数の個数は、

$$3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 96 \quad [\text{個}]$$

である。

II.

(i)

C_1 を表す式 $y=x^2+ax+b$ を x について微分すると、

$$y'=2x+a$$

となるから、点 $P(0, b)$ における C_1 の接線を表す方程式は、

$$y=a(x-0)+b$$

$$\therefore y=ax+b$$

である。この直線と放物線 $C_2: y=x^2+bx+a$ が接するとき、2 式を連立して y を消去してできる 2 次方程式

$$x^2+bx+a=ax+b$$

$$\Leftrightarrow x^2+(-a+b)x+a-b=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が重解をもつから、 $\textcircled{1}$ の判別式を D とすると、

$$D=0$$

$$\Leftrightarrow (-a+b)^2-4(a-b)=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2-4(a-b)=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a-b-4)=0$$

$$\therefore a-b-4=0 \quad (\because a \neq b)$$

なる関係式が成り立つことがわかる。

(答) $a-b-4=0$

(ii)

$\textcircled{1}$ を変形すると、

$$x^2+(-a+b)x+a-b=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-(a-b)x+(a-b)=0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となるから、 $\textcircled{2}$ に(1)の結果を用いることで、点 Q の x 座標は、

$$x^2-4x+4=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x=2$$

と求まる。また、 $x=2$ を接線の式に代入することで、点 Q の y 座標は、

$$y=2a+a-4=3a-4$$

と求まる。

(答) $Q(2, 3a-4)$

(iii)

放物線 C_1 を表す式 $y=x^2+ax+b$ と放物線 C_2 を表す式 $y=x^2+bx+a$ に $b=a-4$ を代入すると、それぞれ

$$\begin{cases} y=x^2+ax+a-4 \\ y=x^2+(a-4)x+a \end{cases}$$

となるから、2 式から y を消去すると、

$$x^2+ax+a-4=x^2+(a-4)x+a$$

$$\Leftrightarrow -4x=-4$$

$$\therefore x=1$$

となる。また、これを放物線 C_1 の式 $y=x^2+ax+a-4$ に代入することで、

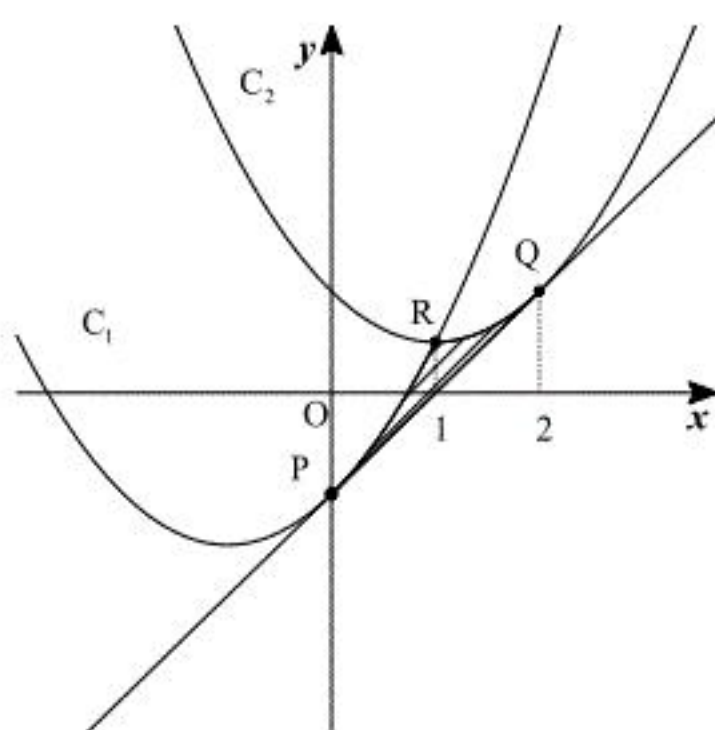
$$y=2a-3$$

となる。

(答) $R(1, 2a-3)$

(iv)

(ii), (iii)より、放物線 C_1, C_2 、と線分 PQ で囲まれる図形は以下の図の斜線部である。



したがって、求める図形の面積 A を計算すると、

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \left\{ (x^2+ax+a-4) - (ax+a-4) \right\} dx + \int_1^2 \left\{ (x^2+(a-4)x+a) - (ax+a-4) \right\} dx \\ &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (x-2)^2 dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_1^2 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2}{3}$

(v)

接線の式は $y=ax+a-4$ であるから、線分 PQ 上の点 S の座標は、ある実数 s を用いて

$(s, as+a-4) (0 \leq s \leq 2)$ とおける。点 P と点 R の座標は、それぞれ $(0, a-4) (1, 2a-3)$ である

から、ベクトル $\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}$ の成分表示は、

$$\overrightarrow{PR}=(1, a+1), \overrightarrow{PS}=(s, as)$$

である。このとき、 $\triangle PRS$ の面積は、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} |1 \cdot as - (a+1) \cdot s| \\ &= \frac{1}{2} |s| \\ &= \frac{1}{2} s \quad (\because 0 \leq s \leq 2) \end{aligned}$$

となるから、この値が(iv)で求めた面積 A と一致するとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} s &= \frac{2}{3} \\ \therefore s &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。この値は $0 \leq s \leq 2$ を満たす。

(答) $\frac{4}{3}$

Ⅲ.

(i)

与えられた漸化式より、 $n=1$ から順次代入して、 a_1 から a_4 までの値を求めると、

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= -a_1 + \frac{1+(-1)^2}{2} = 1 \\ a_3 &= -a_2 + \frac{1+(-1)^3}{2} = -1 \\ a_4 &= -a_3 + \frac{1+(-1)^4}{2} = 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_3 = -1, a_4 = 2$

(ii)

b_{n+1} と b_n の差を d_n とすると、

$$\begin{aligned} d_n &= b_{n+1} - b_n \\ &= (-1)^{n+1}(a_{n+1} + c) - (-1)^n(a_n + c) \\ &= (-1)^{n+1}(a_{n+1} + c + a_n + c) \\ &= (-1)^{n+1}\left(-a_n + \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} + c + a_n + c\right) \\ &= (-1)^{n+1}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2} + \frac{1}{2} + 2c\right) \\ &= \{(-1)^2\}^{n+1} \cdot \frac{1}{2} + (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2} + 2c\right) \\ &= \frac{1}{2} + (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2} + 2c\right) \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。 b_n が等差数列になるための条件は、 d_n が n によらない定数となるような条件と一致

する。すなわち、式 $(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2} + 2c\right)$ が n に依存しない定数になればよいから、定数 c を

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + 2c &= 0 \\ \therefore c &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

のように定めればよい。

(答) $c = -\frac{1}{4}$

(iii)

(ii)の答より、 $c = -\frac{1}{4}$ とすると、 b_n は公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列である。数列 b_n の初項 b_1 を計算する

と、

$$b_1 = (-1)^1\left(0 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

となるから、数列 b_n の一般項は、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(n-1) \\ &= \frac{1}{2}n - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

と求まる。また、 $b_n = (-1)^n\left(a_n - \frac{1}{4}\right)$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}n - \frac{1}{4} &= (-1)^n\left(a_n - \frac{1}{4}\right) \\ \therefore a_n &= \frac{1}{4} + \frac{2n-1}{4}(-1)^n \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_n = \frac{1}{4} + \frac{2n-1}{4}(-1)^n$

(iv)

m を自然数とする。

[1] $n=2m-1$ のとき、これを a_n の一般項に代入すると、

$$a_n = \frac{1}{4} + \frac{-(4m-3)}{4} = 1-m$$

となる。

[2] $n=2m$ のとき、これを a_n の一般項に代入すると、

$$a_n = \frac{1}{4} + \frac{4m-1}{4} = m$$

となる。

以上[1],[2]より、

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} (a_k)^2 \\ &= \sum_{m=1}^n (1-m)^2 + \sum_{m=1}^n m^2 \\ &= \sum_{m=1}^n (2m^2 - 2m + 1) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n \\ &= \frac{n(2n^2+1)}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $S_{2n} = \frac{n(2n^2+1)}{3}$