

I

【解答】

$$\text{ア} \quad -10 \quad \text{イ} \quad 4 \quad \text{ウ} \quad 125 \quad \text{エ} \quad \frac{3}{4}\pi \quad \text{オ} \quad \frac{\pi}{6}$$

$$\text{カ} \quad 452 \quad \text{キ} \quad -\frac{1}{2} \quad \text{ク} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ケ} \quad 17 \quad \text{コ} \quad \frac{1}{8}$$

$$\text{サ} \quad \frac{3}{4} \quad \text{シ} \quad -1 \quad \text{ス} \quad 24$$

【解説】

(i)

円の中心は、点 Q における法線と線分 PQ の垂直二等分線の交点である。点 Q における法線

は $(0, -1)$ を通り、傾きが $-\frac{1}{2}$ の直線であるから、その方程式は

$$y = -\frac{1}{2}x - 1$$

となる。また、線分 PQ の中点は $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 、直線 PQ の傾きが 3 であることから、線分 PQ の垂

直二等分線は $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を通り、傾きが $-\frac{1}{3}$ の直線であり、その方程式は

$$y = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

となる。これら 2 直線の交点の座標は $(-10, 4)$ となる。さらに、2 点 $(-10, 4)$ 、 $(0, -1)$ 間の距離

は $\sqrt{125}$ であり、これは円の半径にあたるから、求める円の方程式は

$$(x+10)^2 + (y-4)^2 = 125$$

となる。

(ii)

$2\vec{a} - \vec{b} = (1, 0, -1)$ であるから、 $\vec{a}$ と $2\vec{a} - \vec{b}$ のなす角を θ ($0 < \theta < \pi$) とおくと

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a}| |2\vec{a} - \vec{b}|} \\ &= \frac{-3}{3 \cdot \sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となる。よって、 $\theta = \frac{3}{4}\pi$ である。

(iii)

$0 < x < \pi$ であるとき

$$\begin{aligned} \sin x + \sqrt{3} \cos x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) &= 2 \\ \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \left(\because \frac{\pi}{3} < x + \frac{\pi}{3} < \frac{4}{3}\pi \right) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

となる。

(iv)

分母が n である項は n 個あり、 $\frac{17}{30}$ は分母が 30 である項の中で 17 番目にあたるから

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{29} n + 17 &= \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 30 + 17 \\ &= 452 \end{aligned}$$

より、この数列の第 452 項である。

(v)

$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ のとき

$$\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \omega^3 = 1$$

となるから

$$\begin{aligned} \omega^8 &= (\omega^3)^2 \omega^2 \\ &= \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

である。

(vi)

$$\begin{aligned} x^2 + ax + 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x+a) &= -16 \end{aligned}$$

となる。 a が整数であり、この方程式が整数解をもつとき、その解に対して x 、 $x+a$ は整数で

あり、そのうち $a > 0$ である場合については $x+a > x$ であるから

$$(x, x+a) = (-16, 1), (-8, 2), (-4, 4), (-2, 8), (-1, 16)$$

である。この中で a が最大になるのは

$$(x, x+a) = (-16, 1), (-1, 16)$$

の場合であり、 $a=17$ となる。

(vii)

サイコロを振ったときの目の出方は同様に確からしいとする。サイコロを 4 回振って連続し

て偶数も奇数もあらわれないとき、サイコロの出た目は偶数と奇数が交互にあらわれるから、

1 回目の出た目が奇数または偶数である場合に対して、偶奇の出方はそれぞれ 1 通りに決ま

る。よって、このようになる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 2 = \frac{1}{8}$$

となる。

(viii)

$t = 2^x$ 、 $u = t + \frac{1}{t}$ とおくと、 x が実数を動くとき

$$t > 0$$

であり、相加平均と相乗平均の大小関係より

$$u \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 2$$

となる。ただし、等号は

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{t} \\ \Leftrightarrow t^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow t &= 1 \left(\because t > 0 \right) \end{aligned}$$

のとき成り立つ。このもとで

$$\begin{aligned} f(x) &= t^2 + t^{-2} - 5\left(t + t^{-1}\right) + 9 \\ &= \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 5\left(t + \frac{1}{t}\right) + 7 \\ &= u^2 - 5u + 7 \\ &= \left(u - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

となるから、 $f(x)$ は

$$u = \frac{5}{2} \text{ のとき最小値 } \frac{3}{4}$$

をとる。

(ix)

$$\int_a^x f(t) dt = x^2 + (3a+8)x + 4$$

に $x=a$ を代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= a^2 + (3a+8)a + 4 \\ \Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a+1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -1 \end{aligned}$$

となる。

(x)

$\log_{10} 2 = 0.3010$ 、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とすると

$$2 = 10^{0.3010}, 3 = 10^{0.4771}$$

となるから

$$\begin{aligned} 6^{30} &= (2 \times 3)^{30} \\ &= \left(10^{0.3010} \times 10^{0.4771}\right)^{30} \\ &= \left(10^{0.7781}\right)^{30} \\ &= 10^{23.343} \end{aligned}$$

となり、 $24-1 < 23.343 < 24$ であるから、 6^{30} は 24 桁の整数である。

II

(i)

3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の解が p, pr, pr^2 であるとき、解と係数の関係より

$$\begin{aligned} a &= -(p + pr + pr^2) \\ &= -p(1 + r + r^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= p \cdot pr + pr \cdot pr^2 + pr^2 \cdot p \\ &= p^2 r(1 + r + r^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= -p \cdot pr \cdot pr^2 \\ &= -p^3 r^3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = -p(1 + r + r^2), \quad b = p^2 r(1 + r + r^2), \quad c = -p^3 r^3$$

(ii)

(i)の結果を用いて

$$\frac{b}{a} = -pr$$

であるから

$$\begin{aligned} c &= (-pr)^3 \\ &= \frac{b^3}{a^3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad c = \frac{b^3}{a^3}$$

(iii)

[1] $r = 0, \pm 1$ であるとき

方程式の解が重解をもち、3 つの相異なる実数解を持つことに反するため不適である。

[2] $r < -1$ であるとき

$r < 1 < r^2$ となるから、 pr, p, pr^2 がこの順に等差数列をなすから、等差中項の定理より

$$\begin{aligned} 2p &= pr + pr^2 \\ \Leftrightarrow r^2 + r - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (r-1)(r+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow r &= -2 \end{aligned}$$

となる。

[3] $-1 < r < 0$ のとき

$r < r^2 < 1$ となるから、 pr, pr^2, p がこの順に等差数列をなすから、等差中項の定理より

$$\begin{aligned} 2pr^2 &= pr + p \\ \Leftrightarrow 2r^2 - r - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2r+1)(r-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow r &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

[4] $0 < r < 1$ のとき

$r^2 < r < 1$ となるから、 pr^2, pr, p がこの順に等差数列をなすから、等差中項の定理より

$$\begin{aligned} 2pr &= pr^2 + p \\ \Leftrightarrow r^2 - 2r + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (r-1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

となるが、これを満たす r は存在せず不適である。

[5] $1 < r$ のとき

$1 < r < r^2$ となるから、 p, pr, pr^2 がこの順に等差数列をなすから、等差中項の定理より

$$\begin{aligned} 2pr &= pr^2 + p \\ \Leftrightarrow r^2 - 2r + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (r-1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

となるが、これを満たす r は存在せず不適である。

以上、[1], [2], [3], [4], [5]より、求める r の値は $r = -\frac{1}{2}, -2$ となる。

$$(\text{答}) \quad r = -\frac{1}{2}, -2$$

(iv)

$b = 2a$ であるとき $\frac{b}{a} = -pr$ より $-pr = 2$ となる。

[1] $r = -\frac{1}{2}$ のとき

$p = 4$ となるから、(i)の結果を用いて $a = -3, b = -6, c = 8$ となる。

[2] $r = -2$ のとき

$p = 1$ となるから、(i)の結果を用いて $a = -3, b = -6, c = 8$ となる。

以上、[1], [2]より、 $a = -3, b = -6, c = 8$ となる。

$$(\text{答}) \quad a = -3, b = -6, c = 8$$

III

(i)

$f(x) = -x^2 + 2x + 2$ とおくと $f'(x) = -2x + 2$ であるから、 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接

線の方程式は

$$y = f'(t)(x - t) - t^2 + 2t + 2$$

$$\Leftrightarrow y = (-2t + 2)x + t^2 + 2$$

となる。これが $A(0, a)$ を通るとき

$$a = t^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow t^2 = a - 2$$

が成り立ち、このような接線が異なる 2 本存在するのは、これを満たす実数 t が 2 つ存在するときであり $a > 2$ となる。

(答) $a > 2$

(ii)

(i)の結果を用いて $a > 2$ のとき $t = \pm\sqrt{a-2}$ である。

[1] $t = \sqrt{a-2}$ のとき

接点の座標は $(\sqrt{a-2}, -a+4+2\sqrt{a-2})$ となり、接線の方程式は

$$y = (-2\sqrt{a-2} + 2)x + a$$

となる。

[2] $t = -\sqrt{a-2}$ のとき

接点の座標は $(-\sqrt{a-2}, -a+4-2\sqrt{a-2})$ となり、接線の方程式は

$$y = (2\sqrt{a-2} + 2)x + a$$

となる。

(答) 接線の式: $y = (\pm 2\sqrt{a-2} + 2)x + a$, 接点の座標: $(\mp\sqrt{a-2}, -a+4\mp 2\sqrt{a-2})$ (複号同順)

(iii)

2 本の接線が直交するのは、接線の傾きの積が -1 になるときであるから

$$(-2\sqrt{a-2} + 2)(2\sqrt{a-2} + 2) = -1$$

$$\Leftrightarrow -4(a-2) + 4 = -1$$

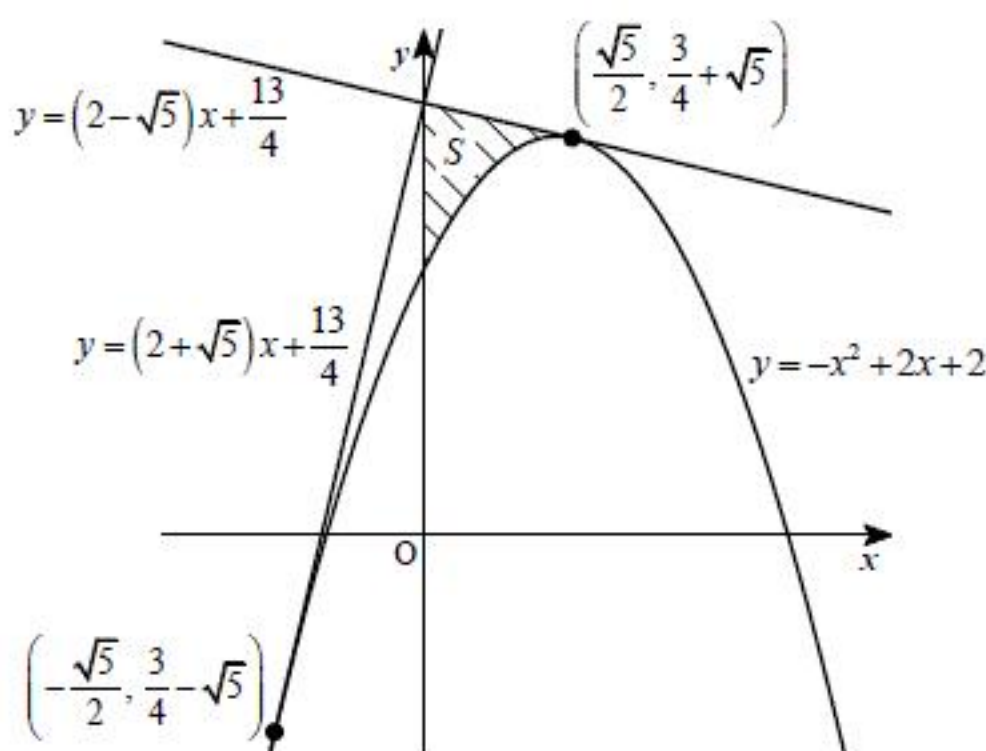
$$\Leftrightarrow a = \frac{13}{4}$$

となる。

(答) $a = \frac{13}{4}$

(iv)

$a = \frac{13}{4}$ のとき、 S は下図の斜線部の面積となる。



よって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \left[\left\{ (2 - \sqrt{5})x + \frac{13}{4} \right\} - (-x^2 + 2x + 2) \right] dx \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \left(x - \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{24} \end{aligned}$$

となる。

(答) $S = \frac{5\sqrt{5}}{24}$