

I.

- (i) ☐ア 10
- (ii) ☐イ $\frac{9}{2}$
- (iii) ☐ウ -4 ☐エ 4
- (iv) ☐オ 39
- (v) ☐カ $\frac{1}{3}$
- (vi) ☐キ 44 ☐ク -2
- (vii) ☐ケ 64
- (viii) ☐コ $\sqrt{5}$
- (ix) ☐サ 1225
- (x) ☐シ -2 ☐ス -1 ☐セ 2

【解説】

(i)

$$(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

より、 x^3 の係数は10である。

(ii)

円の半径を r とし、点Oから線分ABにおろした垂線の足をHとする。ただし点Oが線分AB上にあるときは点Oと点Hは重なっているとする。このとき、点Hは線分ABの中点となっているので

$$AH = \frac{3}{2}$$

であり、

$$\cos \angle BAO = \frac{AH}{OA} = \frac{3}{2r}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{AO} &= |\overline{AB}| |\overline{AO}| \cos \angle BAO \\ &= 3 \cdot r \cdot \frac{3}{2r} \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

を得る。

(iii)

グラフが点(1,1)を通ることから

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 + p \cdot 1 + q \\ \Leftrightarrow q &= -p \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。一方、この放物線のグラフが x 軸に接するので、方程式 $x^2 + px + q = 0$ の判別式を D とすれば、

$$D = p^2 - 4q = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。よって、①、②を連立して、 q を消去すると、

$$\begin{aligned} -\frac{p^2}{4} - p &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= 0, -4 \end{aligned}$$

となる。 $p=0$ とすると条件 $pq \neq 0$ に反するので、 $p=-4$ である。このとき $q=4$ であり、これは条件をみたす。

(iv)

電車またはバスを利用する学生の人数は、全体からどちらも利用しない学生を除いた

$$120 - 28 = 92 \text{ (人)}$$

である。したがって、電車とバスの両方を利用する学生の人数は

$$83 + 48 - 92 = 39 \text{ (人)}$$

である。

(v)

6枚のカードの並べ方の総数は

$$6! \text{ (通り)}$$

である。ここで、C, D, E, Fの4枚のカードを並べるときの並べ方の総数は

$$4! \text{ (通り)}$$

であり、それぞれについて、その両端または各カードの間にA, Bが隣り合ったものを挿入する方法は

$$5 \cdot 2! = 10 \text{ (通り)}$$

である。したがって、A, Bが隣り合うような6枚のカードの並べ方の総数は

$$4! \cdot 10 \text{ (通り)}$$

であり、そのようになる確率は

$$\frac{4! \cdot 10}{6!} = \frac{1}{3}$$

である。

(vi)

2次方程式 $x^2 - 4x - 2 = 0$ の解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha\beta = -2 \end{cases}$$

が成り立つ。また、2次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解と係数の関係より

$$\begin{cases} \frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = -p \\ \frac{\alpha^2}{\beta} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha} = q \end{cases}$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} p &= -\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} \\ &= -\frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} \\ &= -\frac{4^3 - 3 \cdot (-2) \cdot 4}{-2} \\ &= 44 \\ q &= \alpha\beta = -2 \end{aligned}$$

となる。

(vii)

$$\begin{aligned} \log_2 \sqrt[3]{x} - \log_4 4x^3 + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} \log_2 x - 1 - 3 \log_4 x + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} \log_2 x - \frac{3}{2} \log_2 x &= -7 \\ \Leftrightarrow -\frac{7}{6} \log_2 x &= -7 \\ \Leftrightarrow \log_2 x &= 6 \\ \Leftrightarrow x = 2^6 &= 64 \end{aligned}$$

となる。

(viii)

$x > 0$ より、

$$\begin{aligned} x + x^{-1} &= 7 \\ \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right)^2 &= 9 \\ \Leftrightarrow x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} &= 3 \\ \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}} \right)^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}} &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。

(ix)

100以下の自然数の中で、4で割ると1余る数は

$$4 \cdot 0 + 1, 4 \cdot 1 + 1, 4 \cdot 2 + 1, \dots, 4 \cdot 23 + 1, 4 \cdot 24 + 1$$

と表せるので、その総和は

$$\sum_{k=0}^{24} (4k+1) = 4 \cdot \frac{24 \cdot 25}{2} + 25 = 1225$$

となる。

(x)

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (3x^2 - 4x - 1) dx \\ &= x^3 - 2x^2 - x + C \end{aligned}$$

である。ただし C は積分定数である。ここで、

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + C &= 0 \\ \Leftrightarrow C &= 2 \end{aligned}$$

であるので、

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

を得る。

II.

$P(x)$ を $(x+1)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると、余りが $5x+2$ であることから、

$$P(x) = (x+1)^2 Q(x) + 5x + 2$$

となり、これを微分すると、

$$P'(x) = 2(x+1)Q(x) + (x+1)^2 Q'(x) + 5$$

となる。この 2 式に $x=-1$ を代入すると、

$$P(-1) = 5 \cdot (-1) + 2 = -3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$P'(-1) = 5 \quad \dots \textcircled{2}$$

が得られる。また、 $P(x)$ を $x-2$ で割った余りが 3 であることから、剰余の定理より

$$P(2) = 3 \quad \dots \textcircled{3}$$

である。

(i)

$P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ 、余りを $ax+b$ とすると

$$P(x) = (x+1)(x-2)Q_1(x) + ax + b \quad \dots \textcircled{4}$$

と表せる。④に $x=-1, 2$ を代入すると、①、③より

$$\begin{cases} a \cdot (-1) + b = -3 \\ a \cdot 2 + b = 3 \end{cases}$$

が成り立つ。これを解くと、

$$a = 2, b = -1$$

となり、したがって、 $P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割ったときの余りは

$$2x - 1$$

である。

(答) $2x - 1$

(ii)

$P(x)$ を $(x+1)^2(x-2)$ で割ったときの商を $Q_2(x)$ 、余りを $cx^2 + dx + e$ とすると

$$P(x) = (x+1)^2(x-2)Q_2(x) + cx^2 + dx + e \quad \dots \textcircled{5}$$

と表せる。また、⑤を微分すると、

$$P'(x) = 2(x+1) \cdot (x-2)Q_2(x) + (x+1)^2 \{(x-2)Q_2'(x)\}' + 2cx + d \quad \dots \textcircled{6}$$

となる。⑤、⑥に $x=-1$ を代入し、⑤に $x=2$ を代入すると、①、②、③より

$$\begin{cases} c \cdot (-1)^2 + d \cdot (-1) + e = -3 \\ 2c \cdot (-1) + d = 5 \\ c \cdot 2^2 + d \cdot 2 + e = 3 \end{cases}$$

となる。これを解くと、

$$c = -1, d = 3, e = 1$$

と求まる。したがって、 $P(x)$ を $(x+1)^2(x-2)$ で割ったときの余りは

$$-x^2 + 3x + 1$$

となる。

(答) $-x^2 + 3x + 1$

(iii)

$Q_2(x)$ が n 次式であるとする、 $P(x)$ が 5 次式であることと⑤の表示から、次数について

$$3 + n = 5 \quad \therefore n = 2$$

となることがわかる。そこで、

$$Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$$

とおくと、(ii)の結果と合わせて、⑤は

$$P(x) = (x+1)^2(x-2)(Ax^2 + Bx + C) - x^2 + 3x + 1 \quad \dots \textcircled{5}'$$

のように書ける。ここで、条件より、 $P(0) = -1, P(1) = -5, P(-2) = 11$ であるので、

⑤'に $x=0, 1, -2$ を代入して、

$$\begin{cases} 1^2 \cdot (-2) \cdot C + 1 = -1 \\ 2^2 \cdot (-1) \cdot (A + B + C) - 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = -5 \\ (-1)^2 \cdot (-4) \cdot (4A - 2B + C) - (-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 1 = 11 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} C = -1 \\ A + B + C = 2 \\ 4A - 2B + C = -5 \end{cases}$$

なる連立方程式を得る。これを解くと、

$$A = -\frac{2}{3}, B = \frac{5}{3}, C = 1$$

となる。したがって、求める $P(x)$ は

$$\begin{aligned} & (x+1)^2(x-2) \left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 1 \right) - x^2 + 3x + 1 \\ &= -\frac{1}{3}(2x+1)(x-3)(x+1)^2(x-2) - x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $-\frac{1}{3}(2x+1)(x-3)(x+1)^2(x-2) - x^2 + 3x + 1$

Ⅲ.

(i)

頂点 O は原点である。よって、 $\angle AOB$ が直角となる条件は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ \frac{a^2}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ \frac{b^2}{4} \end{pmatrix} &= ab + \frac{a^2 b^2}{16} = \frac{ab}{16} (ab + 16) = 0 \\ \therefore ab &= -16 \quad (\because a, b \neq 0)\end{aligned}$$

である。

(答) $ab = -16$

(ii)

直線 AB の方程式を $y = \alpha x + \beta$ とおくと、 $\frac{x^2}{4} - (\alpha x + \beta) = 0$ の解は $x = a, b$ となるので、解と係数の関係および(i)の結果より、

$$\begin{aligned}4\alpha &= a + b = t, -4\beta = ab = -16 \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{t}{4}, \beta = 4\end{aligned}$$

である。よって求める方程式は $y = \frac{t}{4}x + 4$ である。

(答) $y = \frac{t}{4}x + 4$

(iii)

直線 OH は原点を通り直線 AB に垂直な直線である。

[1] $t = 0$ のとき

直線 AB の方程式は $y = 4$ なので、直線 OH の方程式は $x = 0$ である。

[2] $t \neq 0$ のとき

直線 AB の方程式は $y = \frac{t}{4}x + 4$ なので、直線 OH の方程式は

$$y = -\frac{4}{t}x \Leftrightarrow 4x + ty = 0$$

である。これは[1]のときを含む。

以上[1], [2]より、直線 OH の方程式は $4x + ty = 0$ である。

(答) $4x + ty = 0$

(iv)

点 H は直線 AB と直線 OH の交点である。よって、連立方程式を解くと、

$$\begin{aligned}\begin{cases} y = \frac{t}{4}x + 4 \\ 4x + ty = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x = -\frac{16t}{t^2 + 16}, y = \frac{64}{t^2 + 16}\end{aligned}$$

より、点 H の座標は $\left(-\frac{16t}{t^2 + 16}, \frac{64}{t^2 + 16}\right)$ である。

(答) $\left(-\frac{16t}{t^2 + 16}, \frac{64}{t^2 + 16}\right)$