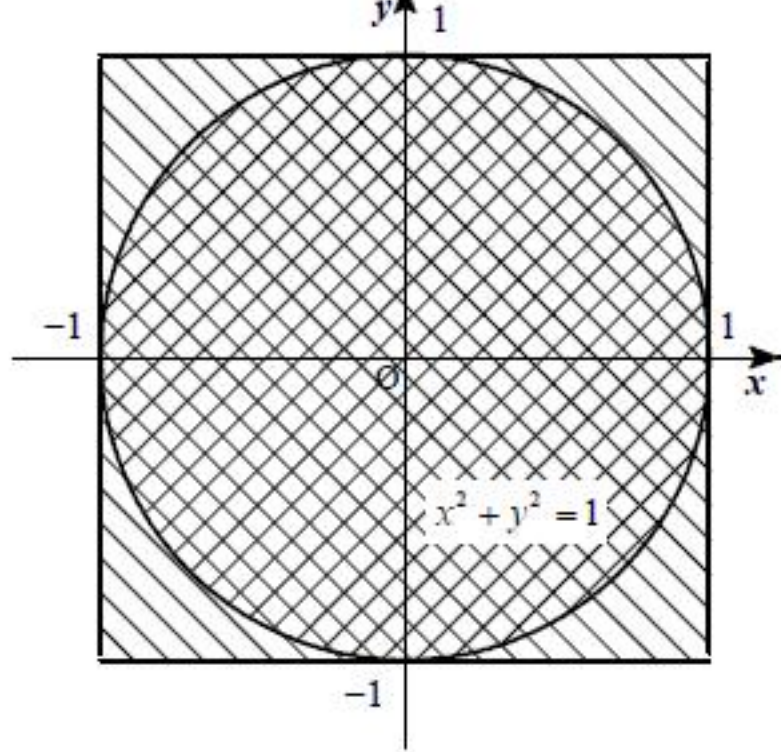


I.

ア	②	イ	-4	ウ	5	エ	100	オ	101
カ	-5	キ	8	ク	8	ケ	$-\frac{3q-13}{2}$	コ	$\sqrt{6}$
サ	$-\sqrt{6}$	シ	$-\frac{16}{9}\sqrt{6}$	ス	$\frac{59}{72}$				

【解説】

(i)



$x^2 + y^2 \leq 1$ を満たす領域を D_1 , 「 $-1 \leq x \leq 1$ かつ $-1 \leq y \leq 1$ 」 を満たす領域を D_2 とすると、上図より、 $D_1 \subset D_2$ であるから、 $x^2 + y^2 \leq 1$ は「 $-1 \leq x \leq 1$ かつ $-1 \leq y \leq 1$ 」であるための十分条件である。

(ii)

$$\begin{aligned}
 3x^2 - xy - 2y^2 - x + 6y + k &= 3x^2 - (y+1)x - 2y^2 + 6y + k \\
 &= 3\left(x - \frac{y+1}{6}\right)^2 - \frac{(y+1)^2}{12} - 2y^2 + 6y + k \\
 &= 3\left(x - \frac{y+1}{6}\right)^2 - \frac{25}{12}y^2 + \frac{35}{6}y - \frac{1}{12} + k \\
 &= 3\left(x - \frac{y+1}{6}\right)^2 - \frac{25}{12}\left(y - \frac{7}{5}\right)^2 + \frac{49}{12} - \frac{1}{12} + k \\
 &= 3\left\{\left(x - \frac{y+1}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2\left(y - \frac{7}{5}\right)^2\right\} + 4 + k \\
 &= 3\left(x - \frac{y+1}{6} + \frac{5}{6}y - \frac{7}{6}\right)\left(x - \frac{y+1}{6} - \frac{5}{6}y + \frac{7}{6}\right) + 4 + k \\
 &= (3x + 2y - 4)(x - y + 1) + 4 + k
 \end{aligned}$$

と変形できる。したがって、求める条件は、

$$4 + k = 0 \Leftrightarrow k = -4$$

である。

(iii)

条件より、

$$\begin{aligned}
 \log_2 10 - \log_2 x &= \log_2 20 - \log_2 10 \\
 \Leftrightarrow \log_2 \frac{10}{x} &= \log_2 \frac{20}{10} \\
 \Leftrightarrow \frac{10}{x} &= \frac{20}{10} \\
 \therefore x &= 5
 \end{aligned}$$

と求まる。

(iv)

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{100 \cdot 101} \\
 &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right) \\
 &= 1 - \frac{1}{101} \\
 &= \frac{100}{101}
 \end{aligned}$$

となる。

(v)

$y = x^2 + ax^2 + bx$ に $(x, y) = (2, 4)$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
 4 &= 8 + 4a + 2b \\
 \Leftrightarrow 2a + b + 2 &= 0 \quad \cdots \text{①}
 \end{aligned}$$

となる。また、 $(x, y) = (2, 4)$ における接線の傾きが 0 になることから、 $y' = 3x^2 + 2ax + b$ より、

$$\begin{aligned}
 3 \cdot 4 + 2a \cdot 2 + b &= 0 \\
 \Leftrightarrow 4a + b + 12 &= 0 \quad \cdots \text{②}
 \end{aligned}$$

となる。①、②から、

$$(a, b) = (-5, 8)$$

と求まる。

(vi)

出発してから x 分後に走り出すとする。条件より、

$$80x + 170(16 - x) \geq 2000$$

となれば良い。上式を解くと、

$$x \leq 8$$

と求まる。

(vii)

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ より、

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} p-2 \\ q-3 \end{pmatrix}$$

となるので、 $\angle OAB = 90^\circ$ のとき、

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p-2 \\ q-3 \end{pmatrix} &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2p - 4 + 3q - 9 &= 0 \\
 \Leftrightarrow p &= -\frac{3q-13}{2}
 \end{aligned}$$

と求まる。ただし、 $p = 2$ のときは、点 A と点 B が一致するので除かれる。

(viii)

条件より、実数 α, β を用いて

$$(x, y) = (\sqrt{2} \cos \alpha, \sqrt{2} \sin \alpha), (a, b) = (\sqrt{3} \cos \beta, \sqrt{3} \sin \beta)$$

とおける。これを代入すると、

$$\begin{aligned}
 ax + by &= \sqrt{2} \cos \alpha \cdot \sqrt{3} \cos \beta + \sqrt{2} \sin \alpha \cdot \sqrt{3} \sin \beta \\
 &= \sqrt{6} (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\
 &= \sqrt{6} \cos(\alpha - \beta)
 \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 α, β は任意の実数値を取りうるので、

$$-1 \leq \cos(\alpha - \beta) \leq 1$$

であるから、 $ax + by$ の最大値は $\sqrt{6}$ 、最小値は $-\sqrt{6}$ となる。

(ix)

$x = a - bi$ とおくと、 $y = a + bi$ である。このとき、

$$\begin{aligned}
 x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2) \\
 &= (a - bi + a + bi)(a^2 - 2abi - b^2 - a^2 - b^2 + a^2 + 2abi - b^2) \\
 &= 2a(a^2 - 3b^2)
 \end{aligned}$$

となる。いま、 $(a, b) = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{10}}{3}\right)$ であるから、

$$\begin{aligned}
 x^3 + y^3 &= 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \left(\frac{2}{3} - \frac{10}{3}\right) \\
 &= -\frac{16}{9}\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

と求まる。

(x)

$\sin x + \sin y = \frac{1}{3}$, $\cos x - \cos y = \frac{1}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned}
 (\sin x + \sin y)^2 + (\cos x - \cos y)^2 &= \frac{1}{9} + \frac{1}{4} \\
 \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x) + (\sin^2 y + \cos^2 y) + 2 \sin x \sin y - 2 \cos x \cos y &= \frac{13}{36} \\
 \Leftrightarrow \cos x \cos y - \sin x \sin y &= \frac{1}{2} \left(2 - \frac{13}{36}\right) \\
 \therefore \cos(x+y) &= \frac{59}{72}
 \end{aligned}$$

と求まる。

II.

(i)

問題文の条件を満たすような得点の取り方は、次表のようになる。

回数	1	2	3	4	5
A	0	1	2	3	4
B	1	?	?	?	?

よって、2 回目から 5 回目までの B の得点の取り方を考えればよく、

$$2^4 = 16 \text{ 通り}$$

となる。

(答) 16 通り

(ii)

1 回サイコロを振ったとき、1 点の確率は $\frac{1}{2}$ 、0 点の確率は $\frac{1}{2}$ である。

よって、ゲーム終了時に k 点 ($0 \leq k \leq 5$) であるような確率は、

$${}_5C_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{5-k} = \frac{{}_5C_k}{32}$$

であり、次表のようになる。

得点	0	1	2	3	4	5
確率	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

よって、A と B が引き分ける確率は、

$$\left\{ \left(\frac{1}{32}\right)^2 + \left(\frac{5}{32}\right)^2 + \left(\frac{5}{16}\right)^2 \right\} \times 2 = \frac{63}{256}$$

である。

(答) $\frac{63}{256}$

(iii)

(ii) より、A、B のどちらかが勝つ確率は、

$$1 - \frac{63}{256} = \frac{193}{256}$$

である。ここで、A、B が勝つ確率は等しいので、A が勝つ確率は、

$$\frac{193}{256} \times \frac{1}{2} = \frac{193}{512}$$

である。

(答) $\frac{193}{512}$

Ⅲ.

(i)

問題図より、

$$P(1+\cos\theta, 1+\sin\theta)$$

$$Q(-1-\sin\theta, -1+\cos\theta)$$

と書ける。

$$(\text{答}) \quad P(1+\cos\theta, 1+\sin\theta), \quad Q(-1-\sin\theta, -1+\cos\theta)$$

(ii)

$0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ としても一般性を失わないので、以下 θ はこの範囲にあるものとして考える。

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{\{(1+\cos\theta)-(-1-\sin\theta)\}^2 + \{(1+\sin\theta)-(-1+\cos\theta)\}^2} \\ &= \sqrt{(2+\sin\theta+\cos\theta)^2 + (2+\sin\theta-\cos\theta)^2} \\ &= \sqrt{2 \cdot (2+\sin\theta)^2 + 2\cos^2\theta} \\ &= \sqrt{8+8\sin\theta+2\sin^2\theta+2\cos^2\theta} \\ &= \sqrt{10+8\sin\theta} \end{aligned}$$

と書けるので、線分 PQ の長さは、 $\theta = 90^\circ$ のとき最大値 $3\sqrt{2}$ を、 $\theta = 270^\circ$ のとき最小値 $\sqrt{2}$ をとると分かる。

また、それぞれの θ を問(i)の答えに代入して、

$$P_1(1, 2), Q_1(-2, -1)$$

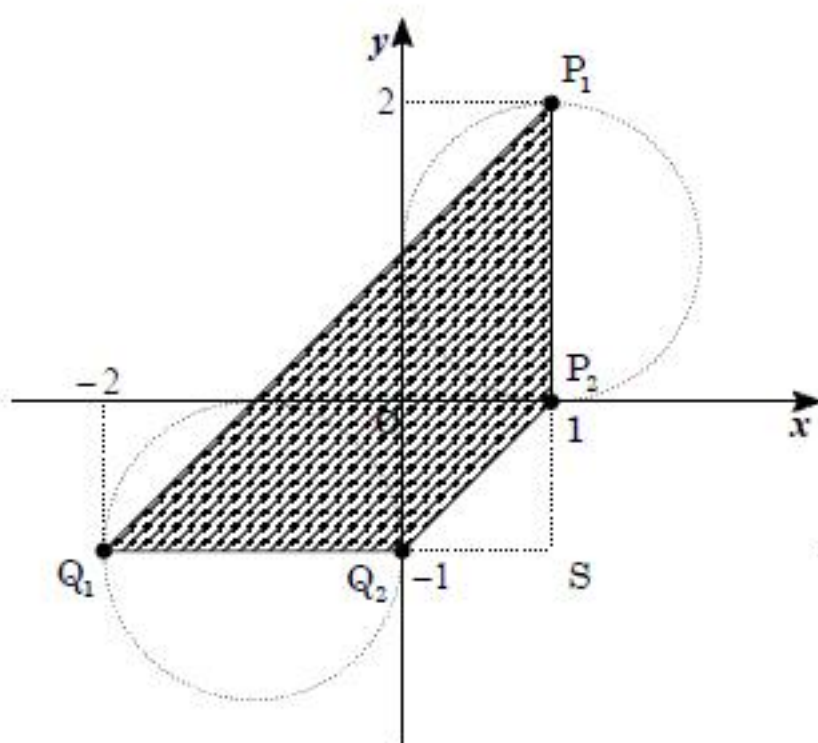
$$P_2(1, 0), Q_2(0, -1)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} \text{線分 } PQ \text{ の長さ : 最大値 } 3\sqrt{2}, \text{ 最小値 } \sqrt{2} \\ P_1(1, 2), Q_1(-2, -1), P_2(1, 0), Q_2(0, -1) \end{cases}$$

(iii)

求める面積は、次図斜線部の面積であり、これは、点 S を $S(1, -1)$ と置いたときに、直角二等辺三角形 P_1Q_1S から直角二等辺三角形 P_2Q_2S を除いた部分の面積に等しく、



$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

と求まる。

(答) 4