

I

【解答】

ア $-\frac{13}{9}$ イ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ウ $-\frac{2}{3} < x < 2$ エ -3

オ -4 カ $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = 1$ キ $2\sqrt{6}$ ク $\frac{3-3a-2b}{2}$

ケ $x^2 + 4x - \frac{7}{6}$ コ $\frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 3$ サ $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

【解説】

(i)

共通の実数解を t とおくと

$$\begin{cases} t^2 + 3pt + 4 = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ t^2 + 3t + 4p = 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成り立つ。① - ② より

$$\begin{aligned} 3(p-1)t + 4(1-p) &= 0 \\ \Leftrightarrow (3t-4)(p-1) &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $p-1 \neq 0$ より $t = \frac{4}{3}$ である。これを②に代入して

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 3 \cdot \frac{4}{3} + 4p &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= -\frac{13}{9} \end{aligned}$$

となる。

(ii)

$\triangle ABC$ に対して余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} AB^2 &= BC^2 + CA^2 - 2BC \cdot CA \cdot \cos C \\ &= 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \\ &= 36 \end{aligned}$$

となるので

$$AB = BC = 6$$

となる。したがって $\angle A = \angle C$ より

$$\cos A = \cos C = \frac{1}{3}$$

となる。 $0 < \angle A < \pi$ より $\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

となる。

(iii)

[1] $x < 0$ のとき

与式は

$$\begin{aligned} -2x - x + 4 &< 6 \\ \Leftrightarrow x &> -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。 $x < 0$ より

$$-\frac{2}{3} < x < 0$$

である。

[2] $0 \leq x < 4$ のとき

与式は

$$\begin{aligned} 2x - x + 4 &< 6 \\ \Leftrightarrow x &< 2 \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq x < 4$ より

$$0 \leq x < 2$$

である。

[3] $x \geq 4$ のとき

与式は

$$2x + x - 4 < 6 \Leftrightarrow x < \frac{10}{3}$$

となる。これは $x \geq 4$ に不適である。

以上[1], [2], [3]より、求める解は

$$-\frac{2}{3} < x < 2$$

である。

(iv)

$$\begin{aligned} (3+2i)x + (1-i)y + 13 + 2i &= 0 \\ \Leftrightarrow (3x+y+13) + (2x-y+2)i &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $3x+y+13, 2x-y+2$ は共に実数であるから

$$\begin{cases} 3x+y+13=0 \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$$

が成り立つ。したがって

$$x = -3, y = -4$$

となる。

(v)

点 Q は円 $x^2 + y^2 = 4$ 上の点より、 $\overrightarrow{OQ} = 2 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ とおける。点 P 、点 Q の中点を (x, y) とおく

と

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}}{2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - \frac{3}{2} \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ \therefore \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

となる。したがって求める軌跡の方程式は、円

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

である。

(vi)

$\cos \theta = \frac{1}{5}$ のとき、 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ より

$$\begin{aligned} \tan^2 \theta &= \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} - 1 \\ &= 24 \end{aligned}$$

となる。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、 $\tan \theta > 0$ なので

$$\tan \theta = 2\sqrt{6}$$

となる。

(vii)

$$\begin{aligned} \log_{100} \frac{125}{9} &= \frac{\log_{10} \frac{125}{9}}{\log_{10} 100} \\ &= \frac{\log_{10} \frac{10^3}{2^3 \cdot 3^2}}{\log_{10} 10^2} \\ &= \frac{3 - 3\log_{10} 2 - 2\log_{10} 3}{2} \\ &= \frac{3 - 3a - 2b}{2} \end{aligned}$$

となる。

(viii)

$\int_0^1 f(t) dt = k$ とおくと、 $f(x) = x^2 + 4x - k$ となる。したがって

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt &= \int_0^1 (t^2 + 4t - k) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} + 2t^2 - kt \right]_0^1 \\ &= \frac{7}{3} - k \end{aligned}$$

となる。 $\int_0^1 f(t) dt = k$ より

$$\begin{aligned} \frac{7}{3} - k &= k \\ \Leftrightarrow k &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

となる。よって

$$f(x) = x^2 + 4x - \frac{7}{6}$$

となる。

(ix)

与えられた数列を $\{a_n\}$ 、数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とおくと

$$\{b_n\}: 2, 5, 8, 11, 14, \dots$$

となるので、 $\{b_n\}$ は初項 2、公差 3 の等差数列である。したがって一般項 b_k は

$$b_k = 2 + 3(k-1) = 3k - 1$$

となる。よって $n \geq 2$ において

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k - 1) \\ &= 2 + \frac{1}{2}(n-1)\{2 + 3(n-1) - 1\} \\ &= \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 3 \end{aligned}$$

が成り立つ。これは $n=1$ でも成り立つので、すべての自然数 n に対し、

$$a_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 3$$

である。

(x)

三角形 ABC の重心を G 、座標空間の原点を O とおくと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{3} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。したがって求める座標は

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

である。

II

(i)

取り出した玉の色の1番目が白,2番目が赤である確率は

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

取り出した玉の色の1番目が赤,2番目が白である確率は

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

取り出した玉の色が2個とも同じ色である確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

したがって,A君が勝ち抜ける確率,B君が勝ち抜ける確率,引き分けになる確率はそれぞれ

$$\frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{5}{9}$$

となる。

$$\text{(答) A君が勝ち抜ける確率: } \frac{2}{9}$$

$$\text{B君が勝ち抜ける確率: } \frac{2}{9}$$

$$\text{引き分けになる確率: } \frac{5}{9}$$

(ii)

はじめの状態を状態P,A君とB君のどちらか1人が勝ち抜けた状態を状態Q,ゲームが終了した状態を状態Rとすると, $P \rightarrow Q$ と遷移する確率は引き分けにならない確率であるから

$$1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

である。また, $Q \rightarrow R$ と遷移する確率は,A君が残っている場合,取り出した玉の色の1番目が白,2番目が赤である確率であり,B君が残っている場合,取り出した玉の色の1番目が赤,2

番目が白である確率であるからともに $\frac{2}{9}$ である。求める確率は, $P \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R$ または

$P \rightarrow Q \rightarrow Q \rightarrow R$ と遷移する確率であるから

$$\frac{5}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{2}{9} + \frac{4}{9} \times \left(1 - \frac{2}{9}\right) \times \frac{2}{9} = \frac{32}{243}$$

となる。

$$\text{(答) } \frac{32}{243}$$

(iii)

A君が勝ち抜けとなるのが, k 回目の試行後であるとする($1 \leq k \leq n-1$),各回の試行後の状態と確率との対応は下表の通りとなる。

回数	1	...	$k-1$	k	$k+1$	...	$n-1$	n
状態	P	...	P	Q	Q	...	Q	R
確率	$\frac{5}{9}$	...	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{9}$	...	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}$
	$k-1$			$n-k-1$				

したがって, k 回目の試行でA君が勝ち抜けとなり,その後, n 回目の試行でB君がゲームを終了させる確率は

$$\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1} \times \frac{2}{9} \times \left(\frac{7}{9}\right)^{n-k-1} \times \frac{2}{9} = \frac{4 \cdot 7^{n-2}}{9^n} \left(\frac{5}{7}\right)^{k-1}$$

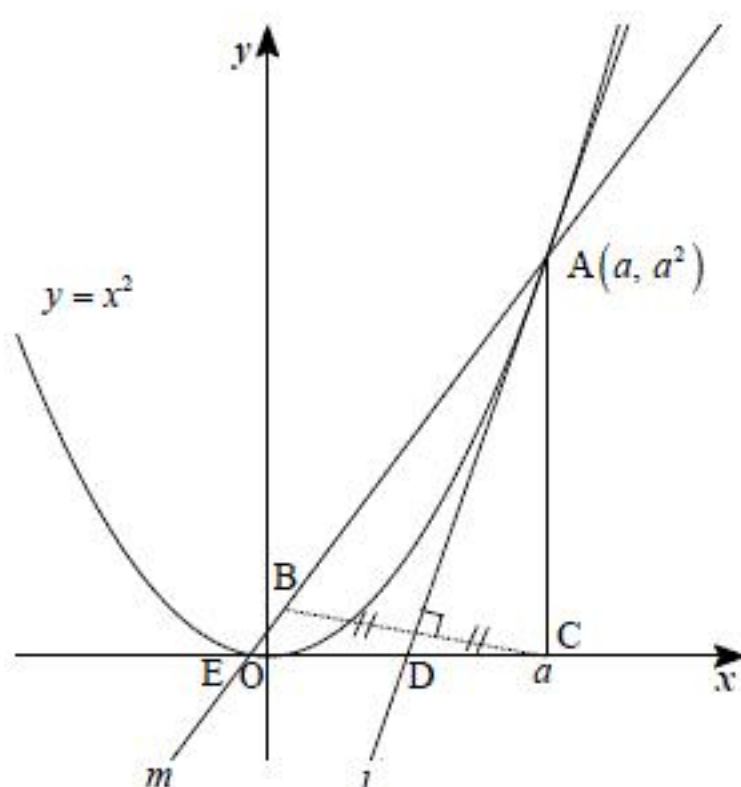
となる。よって,求める確率は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4 \cdot 7^{n-2}}{9^n} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{k-1} &= \frac{4 \cdot 7^{n-2}}{9^n} \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}}{1 - \frac{5}{7}} \\ &= \frac{2}{9^n} (7^{n-1} - 5^{n-1}) \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答) } \frac{2}{9^n} (7^{n-1} - 5^{n-1})$$

III



(i)

点 $(a, 0)$ を C とし、直線 l, m の x 軸との交点をそれぞれ D, E とすると、 $\angle ACD = \frac{\pi}{2}$ 、

$\angle ADC = \theta$ であるから

$$\angle ADE = \pi - \theta$$

である。また、 $\triangle ACD$ に着目すると

$$\angle CAD = \pi - \angle ACD - \angle ADC$$

$$= \pi - \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$= \frac{\pi}{2} - \theta$$

となる。また、直線 l は線分 BC の垂直二等分線であるから

$$\angle EAD = \angle CAD = \frac{\pi}{2} - \theta$$

である。よって、 $\triangle ADE$ に着目すると

$$\gamma = \angle AED$$

$$= \pi - \angle EAD - \angle ADE$$

$$= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) - (\pi - \theta)$$

$$= 2\theta - \frac{\pi}{2}$$

となる。

(答) $\gamma = 2\theta - \frac{\pi}{2}$

(ii)

$$\begin{aligned}\tan \gamma &= \tan \left(2\theta - \frac{\pi}{2} \right) \\&= \frac{\sin \left(2\theta - \frac{\pi}{2} \right)}{\cos \left(2\theta - \frac{\pi}{2} \right)} \\&= \frac{-\cos 2\theta}{\sin 2\theta} \\&= \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{2 \sin \theta \cos \theta} \\&= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \\&= \frac{1}{2} \left(\tan \theta - \frac{1}{\tan \theta} \right)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \tan \gamma = \frac{1}{2} \left(\tan \theta - \frac{1}{\tan \theta} \right)$$

(iii)

$y = x^2$ の両辺を x で微分すると $y' = 2x$ となるので、直線 l の傾きは $2a$ である。したがって

$\tan \theta = 2a$ となるので, (ii)より直線 m の傾きは

$$\frac{1}{2}\left(2a - \frac{1}{2a}\right) = \frac{4a^2 - 1}{4a}$$

となる。また、直線 m は点 (a, a^2) を通るので直線 m の方程式は

$$y - a^2 = \frac{4a^2 - 1}{4a}(x - a)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4a^2 - 1}{4a}x + \frac{1}{4}$$

となる。

(答) $y = \frac{4a^2 - 1}{4a}x + \frac{1}{4}$

(iv)

(iii)より、直線 m の y 切片は a の値によらず $\frac{1}{4}$ である。したがって、直線 m は a の値によらず

点 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ を通る。

(答) $\left(0, \frac{1}{4}\right)$