

I

(i)

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 4 \text{ について}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$f''(x) = 6x + 6$$

であり、 $f'(x)$ についての増減表は以下のようになる。

x		-1	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

増減表から、 $x < -1$ で $y = f(x)$ のグラフは上に凸となり、 $x > -1$ で $y = f(x)$ のグラフは下に凸となる。変曲点の x 座標は -1 となり、 $f(-1) = 6$ から、変曲点の座標は $(-1, 6)$ となる。

(答) $(-1, 6)$

(ii)

点 $(t, f(t))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線は、点 $(t, f(t))$ を通り、傾きが $f'(t)$ であるような直線だから、その方程式は $y = f'(t)(x - t) + f(t)$ で表される。

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x - t) + f(t) \\ &= (3t^2 + 6t)(x - t) + (t^3 + 3t^2 + 4) \\ &= 3t(t + 2)x - (2t^3 + 3t^2 - 4) \end{aligned}$$

より、求める方程式は $y = 3t(t + 2)x - (2t^3 + 3t^2 - 4)$ である。

(答) $y = 3t(t + 2)x - (2t^3 + 3t^2 - 4)$

(iii)

(ii) で求めた方程式に $(x, y) = (1, a)$ を代入すると

$$\begin{aligned} a &= 3t(t + 2) - (2t^3 + 3t^2 - 4) \\ \Leftrightarrow a &= -2t^3 + 6t + 4 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。①を t の関数として考えたとき、 t の解の個数だけ点 $(1, a)$ を通る $y = f(x)$ の接線は存在する。よって、 $g(t) = -2t^3 + 6t + 4$ とおくと、曲線 $y = g(t)$ と直線 $y = a$ の共有点の個数だけ、点 $(1, a)$ を通る $y = f(x)$ の接線は存在する。

$$\begin{aligned} g'(t) &= -6t^2 + 6 \\ &= 6(1 - t^2) \end{aligned}$$

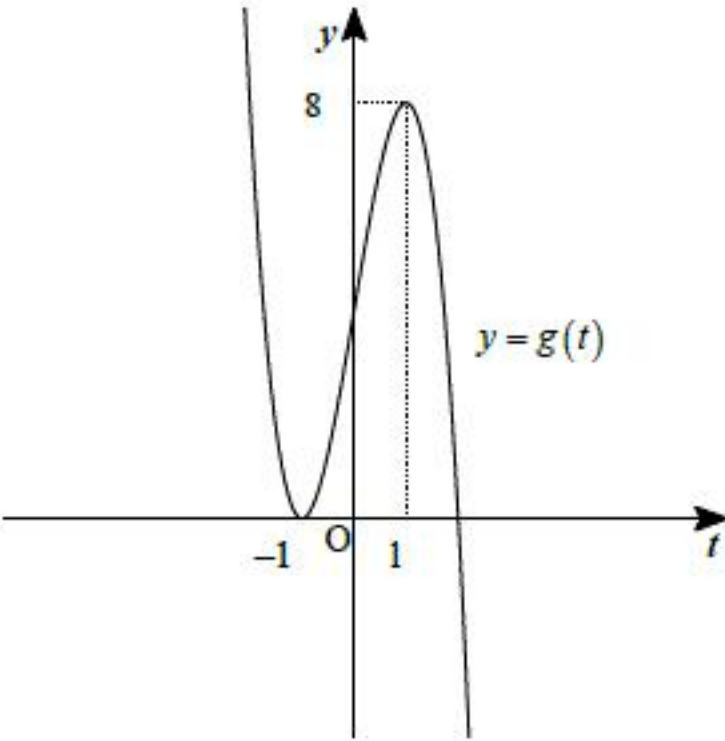
より

$$\begin{aligned} g'(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \pm 1 \end{aligned}$$

であり、 $g(t)$ についての増減表は以下のようになる。

t		-1		1	
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

増減表より、 $y = g(t)$ の概形は以下のグラフのようになる。



以上より、点 $(1, a)$ を通る $y = f(x)$ の接線がちょうど 3 本存在するとき、曲線 $y = g(t)$ と直線 $y = a$ の共有点は 3 点存在する。そのとき、上のグラフから $0 < a < 8$ である。

(答) $0 < a < 8$

(iv)

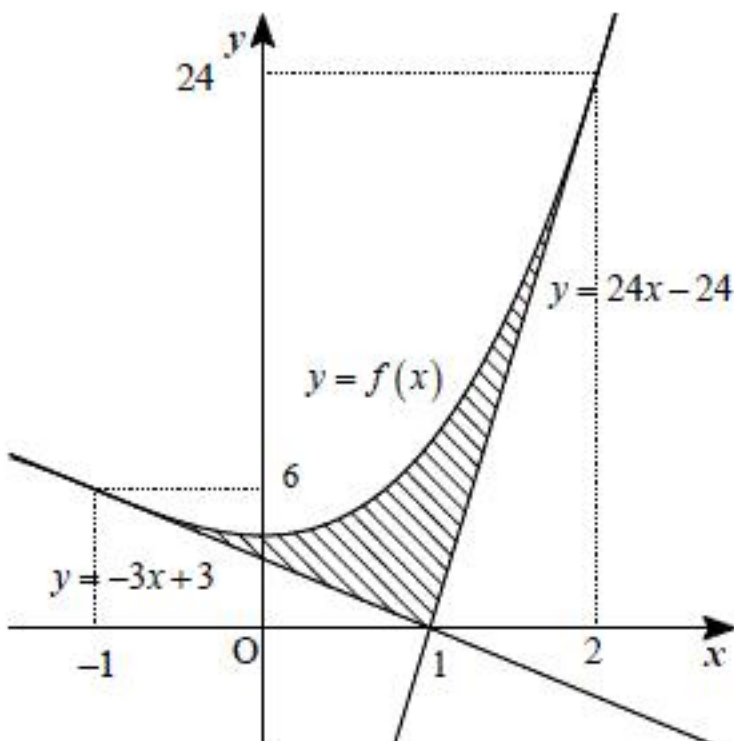
(ii) から、点 $(1, a)$ を通る $y = f(x)$ の接線がちょうど 2 本存在するとき、曲線 $y = g(t)$ と直線 $y = a$ の共有点は 2 点存在し、そのとき、(iii) のグラフから、 $a = 0$ または $a = 8$ である。よって、条件を満たす a の値は、 $a = 0$ である。①の式に $a = 0$ を代入して

$$\begin{aligned} -2t^3 + 6t + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t + 1)^2(t - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= -1, 2 \end{aligned}$$

である。(ii) で求めた接線の方程式に $t = -1, 2$ を代入すると、求める方程式は

$$\begin{aligned} y &= -3x + 3 \quad (t = -1) \\ y &= 24x - 24 \quad (t = 2) \end{aligned}$$

である。よって、曲線と接線の概形は下図のようになる。



図の斜線部の面積が求める面積で、それを S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (x^3 + 3x^2 + 4) dx - \left(2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 24 \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 4x \right]_{-1}^2 - 18 \\ &= \left\{ (4 + 8 + 8) - \left(\frac{1}{4} - 1 - 4 \right) \right\} - 18 \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{27}{4}$

II

(i)

点 $Q(x', y')$ は直線 l 上の点であるから, (x', y') は

$$y' = 2x' \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を満たす。また, 点 $Q(x', y')$ は点 $P(x, y)$ を通り直線 $l: y = 2x$ に垂直な直線上の点であるから, (x', y') は

$$y' = -\frac{1}{2}(x' - x) + y \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

を満たす。よって①, ②より

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y \\ y' = \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となる。ここで, 行列 A は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

をみたすので, ③より

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y \\ \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となり,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

である。同様に, 点 $R(x'', y'')$ は直線 m 上の点であるから, (x'', y'') は

$$y'' = -\frac{1}{2}x'' \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

を満たす。また, 点 $R(x'', y'')$ は点 $P(x, y)$ を通り直線 $m: y = -\frac{x}{2}$ に垂直な直線上の点である

から, (x'', y'') は

$$y'' = 2(x'' - x) + y \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

を満たす。よって④, ⑤より,

$$\begin{cases} x'' = \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y \\ y'' = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

となる。ここで, 行列 B は

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

をみたすから, ⑥より

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y \\ -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となり,

$$B = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

である。

$$(\text{答}) \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

(ii)

$$C = \alpha A + \beta B$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{14}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{11}{5} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{14}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{11}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\alpha + \frac{4}{5}\beta & \frac{2}{5}\alpha - \frac{2}{5}\beta \\ \frac{2}{5}\alpha - \frac{2}{5}\beta & \frac{4}{5}\alpha + \frac{1}{5}\beta \end{pmatrix}$$

であるから, α, β は

$$\begin{cases} \frac{1}{5}\alpha + \frac{4}{5}\beta = \frac{14}{5} \\ \frac{4}{5}\alpha + \frac{1}{5}\beta = \frac{11}{5} \end{cases}$$

を満たす。これを解くと $\alpha = 2, \beta = 3$ であり, このとき

$$\frac{2}{5}\alpha - \frac{2}{5}\beta = -\frac{2}{5}$$

も満たすので, これは解である。

$$(\text{答}) \quad \alpha = 2, \beta = 3$$

(iii)

$$AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから, C^n を展開したとき A^n, B^n 以外の項は消え,

$$\begin{aligned} C^n &= (\alpha A + \beta B)^n \\ &= \alpha^n A^n + \beta^n B^n \end{aligned}$$

となる。また, ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\right)A + \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}\right)I = O$$

$$\Leftrightarrow A^2 = A$$

かつ

$$B^2 - \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\right)B + \left\{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)\right\}I = O$$

$$\Leftrightarrow B^2 = B$$

であることから,

$$\begin{aligned} C^n &= \alpha^n A^n + \beta^n B^n \\ &= \alpha^n A^2 \cdot A^{n-2} + \beta^n B^2 \cdot B^{n-2} \\ &= \alpha^n A^{n-1} + \beta^n B^{n-1} \end{aligned}$$

となる。これを繰り返すことによって, $C^n = \alpha^n A + \beta^n B$ を得る。よって

$$C^n = \alpha^n A + \beta^n B$$

$$= 2^n \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \cdot 2^n + \frac{4}{5} \cdot 3^n & \frac{2}{5} \cdot 2^n - \frac{2}{5} \cdot 3^n \\ \frac{2}{5} \cdot 2^n - \frac{2}{5} \cdot 3^n & \frac{4}{5} \cdot 2^n + \frac{1}{5} \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

となり, これは, すべての自然数 n について成立する。

$$(\text{答}) \quad C^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \cdot 2^n + \frac{4}{5} \cdot 3^n & \frac{2}{5} \cdot 2^n - \frac{2}{5} \cdot 3^n \\ \frac{2}{5} \cdot 2^n - \frac{2}{5} \cdot 3^n & \frac{4}{5} \cdot 2^n + \frac{1}{5} \cdot 3^n \end{pmatrix}$$