

2011年度

D 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は8ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅲとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、出席票の受験番号が、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し、出席票の氏名欄に氏名のみを記入してください。なお、出席票は切り離さないでください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を折り曲げたり、破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 次の空欄ア～ソに当てはまる数または式を記入せよ。解答は解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) x が $0 < x < 1$ と $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$ を満たすとき、 x^3 の値は である。

(ii) 不等式 $\log_5 \left(\frac{x+1}{2} \right) + \log_5 (x-4) < 2$ の解は $< x < \input{ウ}$ である。

(iii) $\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta > 1$ ($-\pi < \theta < \pi$) を満たす θ の範囲は、

$< \theta < \input{オ}$ である。

(iv) 3次方程式 $x^3 + 3x^2 - 24x - a = 0$ が、異なる3つの実数解をもつような定数

a の値の範囲は、 $< a < \input{キ}$ である。

(v) 積分 $\int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx$ の値は である。

(vi) 2次不等式 $ax^2 - 4x + b < 0$ の解が $-3 < x < 5$ であるとき、定数 a は

であり、定数 b は である。

(vii) 2つのベクトル $\vec{a} = (2, -1, 1)$ と $\vec{b} = (x-2, -x, 4)$ のなす角が 30° の

とき、 x の値は である。

(viii) 点 (x, y) が直線 $2x + 3y = 4$ の上を動くとする。 $4^x + 8^y$ が最小値をとると

き、 x, y の値は $x = \input{シ}$, $y = \input{ス}$ である。

(ix) 三角形ABCのAにおける角度は 45° , Cにおける角度は 75° , 辺ACの長さが6で

あるとき、辺BCの長さは である。

(x) 0, 1, 2, 3の数字から選んで4桁の自然数を作るとき、同じ数字を何回用いても

よいとすると、2の倍数でない自然数は 個できる。

Ⅱ. a, b は $a \neq b$ を満たす定数とする. 座標平面上に放物線 C_1 が $y = x^2 + ax + b$ で与えられ, 放物線 C_2 が $y = x^2 + bx + a$ で与えられている. C_1 上の点 $P(0, b)$ での C_1 の接線は, C_2 上の点 Q で C_2 に接しているとする. このとき, 次の問(i)~(v)に答えよ. 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) a と b の間に成り立つ関係式を求めよ.

(ii) 点 Q の座標を a を用いて表せ.

(iii) C_1 と C_2 の交点 R の座標を a を用いて表せ.

(iv) 放物線 C_1, C_2 と線分 PQ で囲まれる図形の面積 A を求めよ.

(v) 線分 PQ 上に点 S を三角形 PRS の面積が (iv) で求めた面積 A と一致するようにとる.

S の x 座標を求めよ.

Ⅲ. 数列 $\{a_n\}$ は次のように定められている. 初項 $a_1 = 0$ であり, すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1} = -a_n + \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}$$

が成り立つ. このとき, 次の問 (i) ~ (iv) に答えよ. 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) a_3, a_4 を求めよ.

(ii) c を定数として $b_n = (-1)^n(a_n + c)$ とおく. $\{b_n\}$ が等差数列になるためには c をどのように定めればよいか. c の値を求めよ.

(iii) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を n を用いて表せ.

(iv) 数列 $\{a_n\}$ の第 $2n$ 項までの 2 乗の和 $S_{2n} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2n}^2$ を求めよ.

【以下余白】

