

I.

(i) ア -448

(ii) イ $\frac{10}{3}$

(iii) ウ 115

(iv) エ 4

(v) オ 3

(vi) カ $a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}$

(vii) キ 15

ク -5

(viii) ケ $1-3\sqrt{3}$

【解説】

(i)

$(x-2y)^8$ の一般項は,

$${}_8C_mx^m(-2y)^{8-m} \quad (m=0,1,\cdots,8)$$

であるので, x^5y^3 の係数は $m=5$ のときである。よって, その係数は,

$${}_8C_5(-2)^3=-448$$

となる。

(ii)

$$\begin{aligned} \int_0^2(x^2-ax+2)dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2+2x\right]_0^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{8}{3}-2a+4 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

となる。

(iii)

3で割り切れる数の個数は,

$$\frac{200}{3}=66.6\cdots$$

であるので, 66個である。 $\cdots$ ①

7で割り切れる数の個数は,

$$\frac{200}{7}=28.5\cdots$$

であるので, 28個である。 $\cdots$ ②

21で割り切れる数の個数は,

$$\frac{200}{21}=9.5\cdots$$

であるので, 9個である。 $\cdots$ ③

①, ②, ③より, 3または7で割り切れる数の個数は,

$$66+28-9=85 \text{ 個}$$

であるので, 3および7のいずれでも割り切れない数の個数は,

$$200-85=115 \text{ 個}$$

である。

(iv)

x, y, z は自然数であるので, x は1または2である。

[1] $x=1$ のとき

$$5x+3y+z=15$$

$$\Leftrightarrow 3y+z=10$$

となるので, この式を満たす (y, z) は,

$$(1, 7), (2, 4), (3, 1)$$

の3組である。

[2] $x=2$ のとき

$$5x+3y+z=15$$

$$\Leftrightarrow 3y+z=5$$

となるので, この式を満たす (y, z) は,

$$(1, 2)$$

の1組である。

以上, [1], [2]より, 求める x, y, z の組の個数は4個である。

(v)

点Pの移動の仕方をサイコロの目により分類すると, 以下のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ が出ると } -2 \text{ 移動する} \\ 2 \text{ が出ると } 6 \text{ 移動する} \\ 3 \text{ が出ると } -6 \text{ 移動する} \\ 4 \text{ が出ると } 12 \text{ 移動する} \\ 5 \text{ が出ると } -10 \text{ 移動する} \\ 6 \text{ が出ると } 18 \text{ 移動する} \end{array} \right.$$

それぞれの目が出る確率は $\frac{1}{6}$ であるので, 求める期待値は,

$$\frac{1}{6} \times (-2+6-6+12-10+18)=3$$

である。

(vi)

$$\begin{aligned} & {}_{10} \log_4 150 \\ &= \frac{{}_{10} \log_2 150}{{}_{10} \log_2 4} \\ &= \frac{1}{2} {}_{10} \log_2 2 \times 3 \times 5^2 \\ &= \frac{1}{2} (2 {}_{10} \log_2 5 + {}_{10} \log_2 3 + 1) \\ &= {}_{10} \log_2 5 + \frac{1}{4} {}_{10} \log_2 9 + \frac{1}{2} \\ &= a + \frac{1}{4} b + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

(vii)

$$\begin{aligned} z &= \frac{a}{1-3i} + \frac{bi}{1+3i} \\ \Leftrightarrow 4i &= \frac{a+3ai+bi-3bi^2}{1-9i^2} \\ \Leftrightarrow 40i &= (a+3b)+(3a+b)i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b=0 \\ 3a+b=40 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a=15 \\ b=-5 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

(viii)

実数 a, b を用いて

$$\overrightarrow{\text{OQ}}=(a, b)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \left| \overrightarrow{\text{OP}} \right|^2 &= \left| \overrightarrow{\text{OQ}} \right|^2 \\ \Leftrightarrow a^2+b^2 &= 40 \quad \cdots \text{ ①} \end{aligned}$$

である。次に, $\overrightarrow{\text{OP}}$ と $\overrightarrow{\text{OQ}}$ のなす角が $\frac{\pi}{3}$ であるので,

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{3} &= \frac{\overrightarrow{\text{OP}} \cdot \overrightarrow{\text{OQ}}}{\left| \overrightarrow{\text{OP}} \right| \left| \overrightarrow{\text{OQ}} \right|} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= \frac{2a+6b}{40} \\ \Leftrightarrow 10 &= a+3b \\ \Leftrightarrow b &= \frac{1}{3}(10-a) \quad \cdots \text{ ②} \end{aligned}$$

となる。②を①に代入すると,

$$\begin{aligned} a^2 + \frac{1}{9}(10-a)^2 &= 40 \\ \Leftrightarrow a^2 - 2a - 26 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 1 \pm 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。 $a < 2$ より,

$$a=1-3\sqrt{3}$$

である。

II

(i)

与式に $n=1$ を代入すると,

$$\begin{aligned}(2\sqrt{2}+\kappa)a_2 &= \sqrt{2}\kappa-2 \\ \Leftrightarrow a_2 &= \frac{\sqrt{2}\kappa-2}{2\sqrt{2}+\kappa}\end{aligned}$$

である。同様に $n=2$ を代入すると,

$$a_3 = \frac{\kappa a_2 - 2}{2a_2 + \kappa} = \frac{\sqrt{2}\kappa^2 - 4\kappa - 4\sqrt{2}}{\kappa^2 + 4\sqrt{2}\kappa - 4}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_3 = \frac{\sqrt{2}\kappa^2 - 4\kappa - 4\sqrt{2}}{\kappa^2 + 4\sqrt{2}\kappa - 4}$$

(ii)

(i)より,

$$\begin{aligned}-\frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\sqrt{2}\kappa^2 - 4\kappa - 4\sqrt{2}}{\kappa^2 + 4\sqrt{2}\kappa - 4} \\ \Leftrightarrow \kappa^2 &= 4\end{aligned}$$

となり, κ は自然数なので,

$$\kappa = 2$$

である。

$$(\text{答}) \quad \kappa = 2$$

(iii)

$$a_{n+1} = \frac{2a_n - 2}{2a_n + 2} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$$

であるから,

$$\begin{aligned}a_4 &= \frac{a_3 - 1}{a_3 + 1} = -(1 + \sqrt{2})^2 \\ a_5 &= \frac{a_4 - 1}{a_4 + 1} = \sqrt{2} = a_1 \\ a_6 &= \frac{a_5 - 1}{a_5 + 1} = \frac{a_1 - 1}{a_1 + 1} = a_2\end{aligned}$$

となる。したがって, 非負整数 m を用いて

$$\begin{aligned}a_{4m+1} &= a_1 \\ a_{4m+2} &= a_2 \\ a_{4m+3} &= a_3 \\ a_{4m+4} &= a_{4(m+1)} = a_4\end{aligned}$$

と表せる。2012 は 4 の倍数なので,

$$a_{2012} = a_4 = -(1 + \sqrt{2})^2 = -3 - 2\sqrt{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_5 = \sqrt{2}, \quad a_{2012} = -3 - 2\sqrt{2}$$

Ⅲ

(i)

放物線 $y = x^2$ と円 C_1 は2点で接するので、 $x^2 + (y - a)^2 = R^2$ に $y = x^2$ を代入して得た式

$$\begin{aligned} y + (y - a)^2 &= R^2 \\ \Leftrightarrow y^2 + (1 - 2a)y + a^2 - R^2 &= 0 \end{aligned}$$

は $y > 0$ で重解をもつ。この判別式を D とし、2接点を $T(x_T, y_T)$, $T'(x_{T'}, y_{T'})$ とすると、
($x_T > 0$, $x_{T'} < 0$)

$$\begin{aligned} D &= (1 - 2a)^2 - 4(a^2 - R^2) = 0 \\ \Leftrightarrow a &= R^2 + \frac{1}{4} \\ \therefore y_T &= -\frac{1 - 2a}{2} = R^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad y_T = R^2 - \frac{1}{4}, \quad a = R^2 + \frac{1}{4}$$

(ii)

$$x_T = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}$$

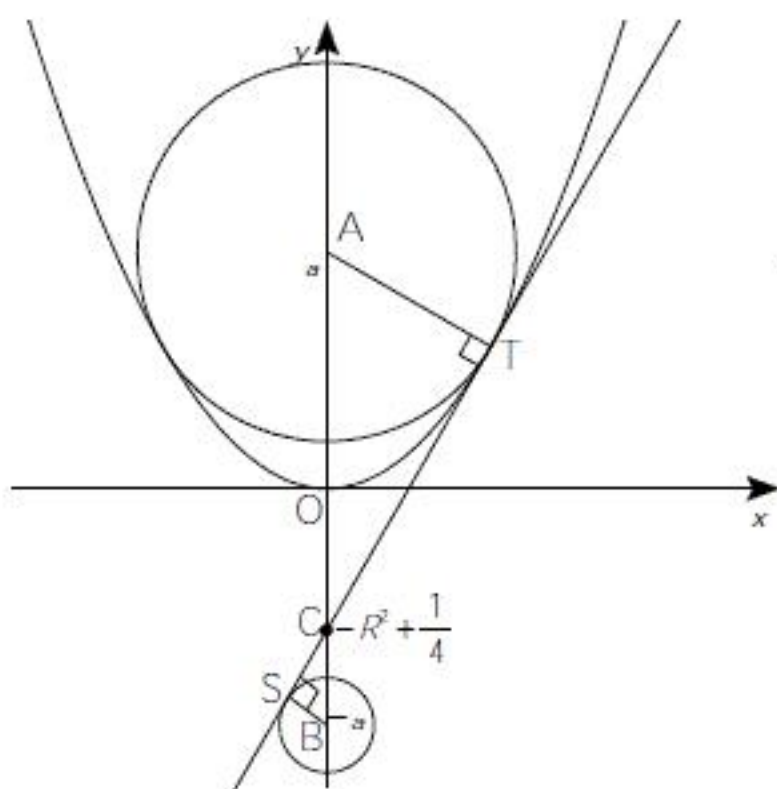
である。 $y' = 2x$ より、 l の式は、

$$\begin{aligned} y &= 2\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}\left(x - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}\right) + R^2 - \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow y &= 2\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}x - R^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = 2\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}x - R^2 + \frac{1}{4}$$

(iii)



上図のように点をとると、 $\triangle ACT \sim \triangle BCS$ より、

$$\begin{aligned} \frac{AT}{BS} &= \frac{AC}{BC} \\ \Leftrightarrow \frac{R}{r} &= \frac{a - \left(-R^2 + \frac{1}{4}\right)}{-R^2 + \frac{1}{4} - (-a)} = \frac{2R^2}{\frac{1}{2}} = 4R^2 \\ \therefore r &= \frac{1}{4R} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad r = \frac{1}{4R}$$