

I.

- (i) ア 18
(ii) イ -1
(iii) ウ $\frac{3}{8}$
(iv) エ $5x-7$
(v) オ $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-8$
(vi) カ, キ $\frac{7}{8}, \frac{5}{8}$
(vii) ク, ケ -2, 3
(viii) コ, サ 2, -9

【解説】

(i)

$$\begin{aligned}x+y&=3, xy=1 \text{ であるから,} \\x^3+y^3& \\&= (x+y)(x^2-xy+y^2) \\&= (x+y)\{(x+y)^2-3xy\} \\&= 3 \cdot (3^2-3) \\&= 18\end{aligned}$$

となる。

(ii)

$$\begin{aligned}\frac{b+c}{a} &= \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} b^2+bc=ca+a^2 \\ c^2+ca=ab+b^2 \\ c^2+bc=ab+a^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (a+b)(a-b)=-c(a-b) \\ (b+c)(b-c)=-a(b-c) \\ (c+a)(c-a)=-b(c-a) \end{cases}\end{aligned}$$

となるが、 a, b, c は互いに異なるので、

$$\begin{cases} a+b=-c \\ b+c=-a \\ c+a=-b \end{cases}$$

となる。よって、

$$\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc} = -1$$

である。

(iii)

白玉を2回取り出すのは、1回目と2回目に白玉を取り出すか、1回目と3回目に白玉を取り出すか、2回目と3回目に白玉を取り出すかの3通りである。また、1回の試行で白玉を取り

出す確率も黒玉を取り出す確率も $\frac{1}{2}$ であるので、求める確率は、

$$3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

である。

(iv)

剰余の定理より、

$$\begin{cases} P(1)=-2 \\ P(2)=3 \\ P(3)=8 \end{cases} \quad \cdots \text{①}$$

である。ここで、実数 a, b, c と多項式 $Q(x)$ を用いて、

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

とすると、①より、

$$\begin{aligned}&\begin{cases} P(1)=a+b+c=-2 \\ P(2)=4a+2b+c=3 \\ P(3)=9a+3b+c=8 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a=0 \\ b=5 \\ c=-7 \end{cases}\end{aligned}$$

となる。よって、求める余りは、

$$5x-7$$

である。

(v)

$$\begin{aligned}2a_{n+1} &= 3a_n + 8 \\ \Leftrightarrow 2(a_{n+1} + 8) &= 3(a_n + 8)\end{aligned}$$

と変形できるので、 $n \geq 2$ において

$$a_n + 8 = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} (a_1 + 8)$$

$$\Leftrightarrow a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 8$$

である。この式は $n=1$ でも成り立つので、

$$a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 8$$

である。

(vi)

実数 s, t を用いて、

$$\begin{cases} \overline{EH} : \overline{HC} = s : 1-s \\ \overline{GH} : \overline{HF} = t : 1-t \end{cases}$$

とする。まず、 s を用いて $\overline{AH}$ を表そうとすると、

$$\begin{aligned}&\begin{cases} \overline{AE} = \frac{2}{3} \overline{AB} \\ \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE} \\ \Leftrightarrow &\overline{EC} = \frac{1}{3} \overline{AB} + \overline{AD}\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}\overline{AH} &= \overline{AE} + \overline{EH} \\ &= \frac{2}{3} \overline{AB} + s \overline{EC} \\ &= \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}s\right) \overline{AB} + s \overline{AD} \quad \cdots \text{①}\end{aligned}$$

である。また、同様にして t を用いて $\overline{AH}$ を表そうとすると、

$$\begin{aligned}&\begin{cases} \overline{BF} = \frac{1}{2} \overline{AD} \\ \overline{DG} = \frac{1}{2} \overline{AB} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \overline{AF} = \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{AD} \\ \overline{AG} = \frac{1}{2} \overline{AB} + \overline{AD} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\overline{GF} = \overline{AF} - \overline{AG} \\ \Leftrightarrow &\overline{GF} = \frac{1}{2} \overline{AB} - \frac{1}{2} \overline{AD}\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}\overline{AH} &= \overline{AG} + \overline{GH} \\ &= \frac{1}{2} \overline{AB} + \overline{AD} + t \overline{GF} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t\right) \overline{AB} + \left(1 - \frac{1}{2}t\right) \overline{AD} \quad \cdots \text{②}\end{aligned}$$

である。①と②より $\overline{AB}, \overline{AD}$ の係数を比較すると、

$$\begin{aligned}&\begin{cases} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ s = 1 - \frac{1}{2}t \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} s = \frac{5}{8} \\ t = \frac{1}{4} \end{cases}\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\overline{AH} = \frac{7}{8} \overline{AB} + \frac{5}{8} \overline{AD}$$

である。

(vii)

$$\begin{aligned}f(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2ax + a + 6 &> 0 \\ \Leftrightarrow (x-a)^2 - a^2 + a + 6 &> 0\end{aligned}$$

となるので、 $f(x)$ の最小値は $-a^2 + a + 6$ である。すべての実数 x に対して $f(x) > 0$ を満たすので、

$$\begin{aligned}f(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow -a^2 + a + 6 &> 0 \\ \Leftrightarrow (a-3)(a+2) &< 0 \\ \Leftrightarrow -2 &< a < 3\end{aligned}$$

となる。

(viii)

$$\begin{aligned}f(1) &= a+b+1 = -6 \\ \Leftrightarrow b &= -a-7 \quad \cdots \text{①}\end{aligned}$$

である。また、

$$f'(x) = 2ax + b$$

であるので、

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \{f'(x)\}^2 dx = 63 \\ \Leftrightarrow &\int_0^1 (4a^2x^2 + 4abx + b^2) dx = 63 \\ \Leftrightarrow &\left[\frac{4}{3}a^2x^3 + 2abx^2 + b^2x\right]_0^1 = 63 \\ \Leftrightarrow &36a^2 + 18ab + 3b^2 = 63 \\ \Leftrightarrow &12a^2 + 6ab + b^2 = 21 \quad \cdots \text{②}\end{aligned}$$

となる。①を②に代入すると、

$$\begin{aligned}12a^2 + 6a(-a-7) + (-a-7)^2 &= 21 \\ \Leftrightarrow 7a^2 - 28a + 28 &= 0 \\ \Leftrightarrow 7(a-2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 2\end{aligned}$$

である。よって、①より

$$b = -9$$

である。

II.

(i)

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 16$$

であるので、

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2, -\frac{8}{3}$$

となる。よって、 $y = f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$-\frac{8}{3}$	...	2	...
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

ゆえに、 $a = 2$ である。

$$f(2) = -17$$

であるので、 $Q(2, -17)$ となる。

(答) $Q(2, -17)$

(ii)

$f(0) = 3$ より、 $P(0, 3)$ である。(i)より、 $Q(2, -17)$, $R(0, -17)$ であるから、円錐 M の底面の半径は 2、高さは 20 である。 M に内接する円柱 N の半径を r 、高さを h とする。 QR 上に $RS = r$ となるように点 S を、 PR 上に $RT = h$ となるように点 T を、 PQ 上に $TU = r$, $SU = h$ となるように点 U をとる。このとき、 $\triangle PQR \sim \triangle PUT$ より、

$$PT : UT = PR : QR$$

$$\Leftrightarrow (20 - h) : r = 20 : 2$$

$$\Leftrightarrow 10r = 20 - h$$

$$\therefore h = 20 - 10r$$

である。 N の体積は、

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 (20 - 10r)$$

である。

(答) $V = \pi r^2 (20 - 10r)$

(iii)

(ii) で求めた N の体積を微分すると、

$$V' = \pi (40r - 30r^2)$$

$$= 10\pi r (4 - 3r)$$

となる。 $V' = 0$ とすると、

$$r = 0, \frac{4}{3}$$

である。下の増減表より、 V は $r = \frac{4}{3}$ のとき最大である。

r	0	...	$\frac{4}{3}$	...	2
V'	$\nearrow$	+	0	-	$\searrow$
V	$\nearrow$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\searrow$

このとき、

$$\begin{aligned} V\left(\frac{4}{3}\right) &= \pi \times \frac{16}{9} \left(20 - \frac{40}{3}\right) \\ &= \pi \times \frac{16}{9} \times \frac{60 - 40}{3} \\ &= \frac{320}{27} \pi \end{aligned}$$

である。

(答) $r = \frac{4}{3}$ のとき $\frac{320}{27} \pi$

Ⅲ.

(i)

A(2, 0), B(-2, 0)はともに円 $x^2 + y^2 = 4$ ・・・①上にある。

$$OA = OP = 2$$

$$AP = \sqrt{(2-1)^2 + (-\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

より、△OAPは正三角形である。したがって、

$$\angle OAP = \frac{\pi}{3}$$

である。 $\angle AOR = \theta$ 、△OARは二等辺三角形より $\angle OAR = \angle ORA$ に注意すると、

$$\begin{aligned}\angle OAR &= \frac{1}{2}(\pi - \theta) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\angle PAR = \angle OAP + \angle OAR = \frac{5}{6}\pi - \frac{\theta}{2}$$

であるので、対応する中心角は

$$\begin{aligned}2\pi - 2\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{\theta}{2}\right) \\ = 2\pi - \frac{5}{3}\pi + \theta \\ = \frac{\pi}{3} + \theta\end{aligned}$$

である。また、OB=OQ=BQ=2より、△OBQも正三角形。したがって、

$$\angle OBQ = \frac{\pi}{3}$$

である。 $\angle BOR = \pi - \theta$ 、△OBRは二等辺三角形なので、 $\angle OBR = \angle ORB$ に注意すると、

$$\begin{aligned}\angle OBR &= \frac{1}{2}\{\pi - (\pi - \theta)\} \\ &= \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\angle QBR = \angle OBQ + \angle OBR = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}$$

であるので、対応する中心角は、

$$\begin{aligned}2\pi - 2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \\ = 2\pi - \theta - \frac{2}{3}\pi \\ = \frac{4}{3}\pi - \theta\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \text{弧 PAR に対する中心角: } \frac{\pi}{3} + \theta, \text{ 弧 QBR に対する中心角: } \frac{4}{3}\pi - \theta$$

(ii)

四角形BQPRは円①に内接しているから、

$$\begin{aligned}\alpha &= \pi - \angle QBR \\ &= \pi - \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{2}{3}\pi - \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

である。また、四角形APQRも円①に内接しているから、

$$\begin{aligned}\beta &= \pi - \angle PAR \\ &= \pi - \left(\frac{5}{6}\pi - \frac{\theta}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \frac{2}{3}\pi - \frac{\theta}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi}{6} + \frac{\theta}{2}$$

(iii)

(ii)より、

$$\begin{aligned}2\sin\alpha &= 2\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2\left(\sin\frac{2}{3}\pi\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{2}{3}\pi\sin\frac{\theta}{2}\right) \\ &= \sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} \\ \sqrt{3}\sin\beta &= \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\theta}{2}\right) \\ &= \sqrt{3}\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\theta}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{3}{2}\sin\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

である。 $2\sin\alpha = \sqrt{3}\sin\beta$ となるとき、

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\theta}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) &= 0\end{aligned}$$

である。いま、 $0 < \theta < \pi$ であるから、

$$\frac{\pi}{6} < \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6} < \frac{2}{3}\pi$$

となるので、

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6} &= \frac{\pi}{2} \\ \therefore \theta &= \frac{2}{3}\pi\end{aligned}$$

である。したがって、求める点Rの座標は、

$$R\left(2\cos\frac{2}{3}\pi, 2\sin\frac{2}{3}\pi\right) = (-1, \sqrt{3})$$

である。

$$(\text{答}) \quad R(-1, \sqrt{3})$$