

1.

【解答】

- (i) ア $\frac{1}{4}$
- (ii) イ $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$
- (iii) ウ $-36\sqrt{3}$
- (iv) エ 4
- (v) オ 14
- (vi) カ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
- (vii) キ $-\frac{63}{8}$
- (viii) ク 100°
ケ $25^\circ, 75^\circ$

【解説】

(i)

$$\begin{aligned}2^a &= \sqrt{2} \div 4^{\frac{1}{4}} \times 32^{\frac{1}{12}} \div 2^{\frac{1}{6}} \\ \Leftrightarrow \log_2 2^a &= \log_2 2^{\frac{1}{2}} - \log_2 4^{\frac{1}{4}} + \log_2 32^{\frac{1}{12}} - \log_2 2^{\frac{1}{6}} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{5}{12} - \frac{1}{6} \\ \therefore a &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

である。

(ii)

まず,

$$\begin{aligned}|\overline{\text{OC}}| &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

である。また、 $\overline{\text{OC}}$ は、 $\overline{\text{OA}}$ および $\overline{\text{OB}}$ と垂直であるので、

$$\begin{aligned}\begin{cases} \overline{\text{OA}} \cdot \overline{\text{OC}} = 0 \\ \overline{\text{OB}} \cdot \overline{\text{OC}} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + z = 0 & \cdots \textcircled{2} \\ x + 3y + 5z = 0 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}\end{aligned}$$

となる。よって、 $\textcircled{2}$ と $\textcircled{3}$ より、

$$\begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$$

となるので、 $\textcircled{1}$ に代入すると、 $z = x > 0$ より、

$$z = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

となる。よって、

$$(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

である。

(iii)

$$\begin{aligned}x^3 + \overline{x}^3 \\ = (x + \overline{x})^3 - 3x\overline{x}(x + \overline{x})\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{cases} x = \sqrt{3} + \sqrt{7}i \\ \overline{x} = \sqrt{3} - \sqrt{7}i \end{cases}$$

を代入すると、

$$\begin{aligned}x^3 + \overline{x}^3 \\ = (2\sqrt{3})^3 - 3 \cdot 10 \cdot 2\sqrt{3} \\ = -36\sqrt{3}\end{aligned}$$

である。

(iv)

まず, 実数条件より、

$$x > 0, y > 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

である。 $\textcircled{4}$ のもとでは、

$$\begin{aligned}\log_2 x + \log_4 y &= 1 \\ \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{\log_2 y}{\log_2 4} &= 1 \\ \Leftrightarrow \log_2 x^2 + \log_2 y &= 2 \\ \Leftrightarrow \log_2 x^2 y &= \log_2 4 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{4}{y}\end{aligned}$$

となるので、

$$x^2 + y = y + \frac{4}{y}$$

となる。 $\textcircled{4}$ より、 $y > 0, \frac{4}{y} > 0$ であるから、相加相乗平均の関係により、

$$x^2 + y \geq 2\sqrt{y \cdot \frac{4}{y}}$$

$$= 4$$

となる。等号成立は、

$$y = \frac{4}{y} \\ \therefore (x, y) = (\sqrt{2}, 2) \quad (\because x > 0, y > 0)$$

のときである。以上より、求める最小値は4となる。

(v)

まず、 $18 = 2 \cdot 9$ であるので、4桁の数が18で割り切れるためには偶数でなければならない。したがって、1の位は0, 2, 6のどれかである。また、9の倍数であるためには、各位の数字を足し合わせた数字が9の倍数でなければならないが、いま、

$$0 + 1 + 2 + 6 = 9$$

なので、1の位が0, 2, 6のどれかであればよい。

[1] 1の位が0のとき

$$3! = 6 \quad (\text{通り})$$

である。

[2] 1の位が2のとき

$$2 \times 2! = 4 \quad (\text{通り})$$

である。

[3] 1の位が6のとき

$$2 \times 2! = 4 \quad (\text{通り})$$

である。

以上[1], [2], [3]より、求める場合の数は

$$6 + 4 + 4 = 14 \quad (\text{通り})$$

である。

(vi)

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ \\ = \cos(45^\circ + 30^\circ) \\ = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

である。

(vii)

$\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^{10}$ の展開式の一般項は、

$${}_{10}C_m (x^3)^m \left(-\frac{1}{2}\right)^{10-m} \quad (m = 0, 1, \dots, 10)$$

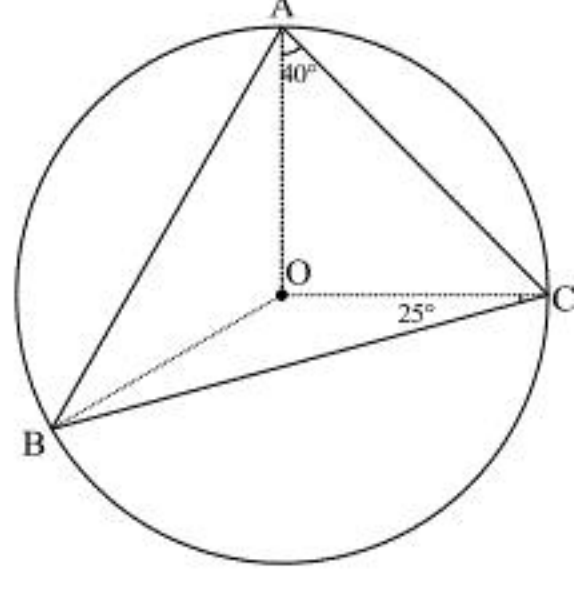
である。 x^{15} の項は上式における $m = 5$ のときである。よって、求める係数は、

$${}_{10}C_5 \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{63}{8}$$

である。

(viii)

[1] 外心Oが $\triangle ABC$ の内部にあるとき



OA = OC ゆえ、 $\angle OCA = \angle OAC = 40^\circ$ である。したがって、

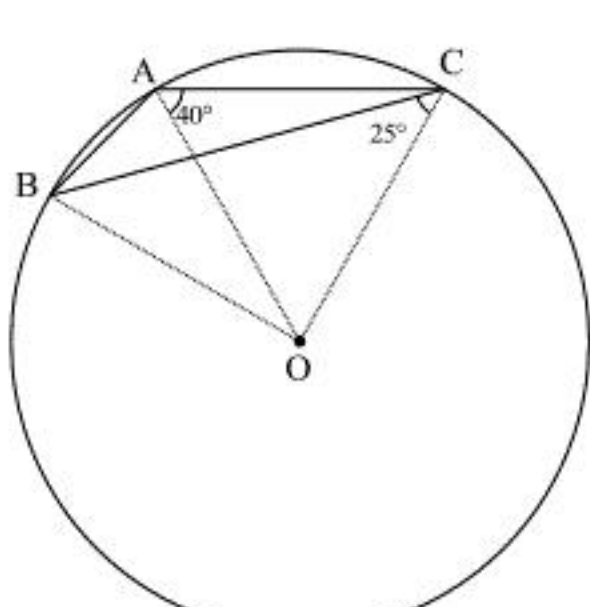
$$\begin{aligned}\angle AOC &= 180^\circ - \angle OAC - \angle OCA \\ &= 180^\circ - 2 \cdot 40^\circ \\ &= 100^\circ\end{aligned}$$

である。また、 $\angle ABO = x^\circ$ として、三角形ABCの内角の和を考えると、

$$\begin{aligned}2x + 2 \cdot 40 + 2 \cdot 25 &= 180 \\ \therefore x &= 25\end{aligned}$$

となる。したがって、 $\angle ABO = 25^\circ$ である。

[2] 外心Oが $\triangle ABC$ の外にあるとき



[1]の場合と同様にして、 $\angle AOC = 100^\circ$ となる。

$$\angle ACB = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$$

であるから、円周角の定理により、

$$\angle AOB = 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$$

となる。したがって、 $\triangle ABO$ について、

$$\angle ABO = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$$

となる。

以上[1], [2]より、 $\angle AOC = 100^\circ, \angle ABO = 25^\circ, 75^\circ$ である。

II.

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{3}{8} - \frac{3^n}{n+2} \quad (n=1, 2, \dots) \quad \dots \textcircled{1}$$

とする。

(i)

①で $n=1$ とおくと、

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{8} - \frac{3}{3} \\ &= -\frac{5}{8} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad a_1 = -\frac{5}{8}$$

(ii)

$n \geq 2$ とすると、

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \frac{3}{8} - \frac{3^n}{n+2} && \dots \textcircled{2} \\ \sum_{k=1}^{n-1} a_k &= \frac{3}{8} - \frac{3^{n-1}}{n+1} && \dots \textcircled{3} \end{aligned} \right.$$

が成り立つ。②から③を引くと、

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{3^n}{n+2} + \frac{3^{n-1}}{n+1} \\ &= \frac{3^{n-1}(n+2) - 3^n(n+1)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{3^{n-1}\{(n+2) - 3(n+1)\}}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{-3^{n-1}(2n+1)}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$a_k = \frac{-3^{k-1}(2k+1)}{(k+1)(k+2)} \quad (k \geq 2)$$

である。

$$\text{(答)} \quad a_k = \frac{-3^{k-1}(2k+1)}{(k+1)(k+2)}$$

(iii)

(ii)より $k \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{(k+1)(k+2)}{3^{k-1}} \cdot \frac{-3^{k-1}(2k+1)}{(k+1)(k+2)} \\ &= -(2k+1) \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

である。また、(i)より $a_1 = -\frac{5}{8}$ であるので、

$$b_1 = \frac{2 \cdot 3}{1} \cdot \left(-\frac{5}{8} \right) = -\frac{15}{4} \quad \dots \textcircled{5}$$

となる。⑤に注意すると、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b_k &= -\frac{15}{4} - \sum_{k=2}^n (2k+1) \\ &= -\frac{15}{4} - \sum_{k=1}^{n-1} (2k+3) \\ &= -\frac{15}{4} - 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - 3(n-1) \\ &= -n^2 - 2n - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

となる。 $\sum_{k=1}^1 b_k = b_1 = -\frac{15}{4}$ より、これは $n=1$ のときも成立する。したがって、すべての自然数 n に対し、

$$\sum_{k=1}^n b_k = -n^2 - 2n - \frac{3}{4}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \sum_{k=1}^n b_k = -n^2 - 2n - \frac{3}{4}$$

Ⅲ.

(i)

$y = \frac{1}{2}x^2$ を微分すると、

$$y' = x$$

となる。よって、 C 上のある一点 $\left(a, \frac{1}{2}a^2\right)$ における C の接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= a(x-a) + \frac{1}{2}a^2 \\ &= ax - \frac{1}{2}a^2 \end{aligned}$$

となる。この接線が点 $P(s, t)$ を通るとき、

$$\begin{aligned} t &= as - \frac{1}{2}a^2 \\ \Leftrightarrow a^2 - 2sa + 2t &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。 α, β はそれぞれ接点 A, B の x 座標であるから、 $\textcircled{1}$ の 2 解は α, β である。したがって、上式において解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2s \\ \alpha\beta = 2t \end{cases}$$

である。

(答) $\alpha + \beta = 2s$

(ii)

$$A\left(\alpha, \frac{1}{2}\alpha^2\right), B\left(\beta, \frac{1}{2}\beta^2\right)$$

であるから、2 点 A, B を通る直線 l の傾きは、

$$\frac{\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha^2}{\beta - \alpha} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \quad (\because \alpha < \beta)$$

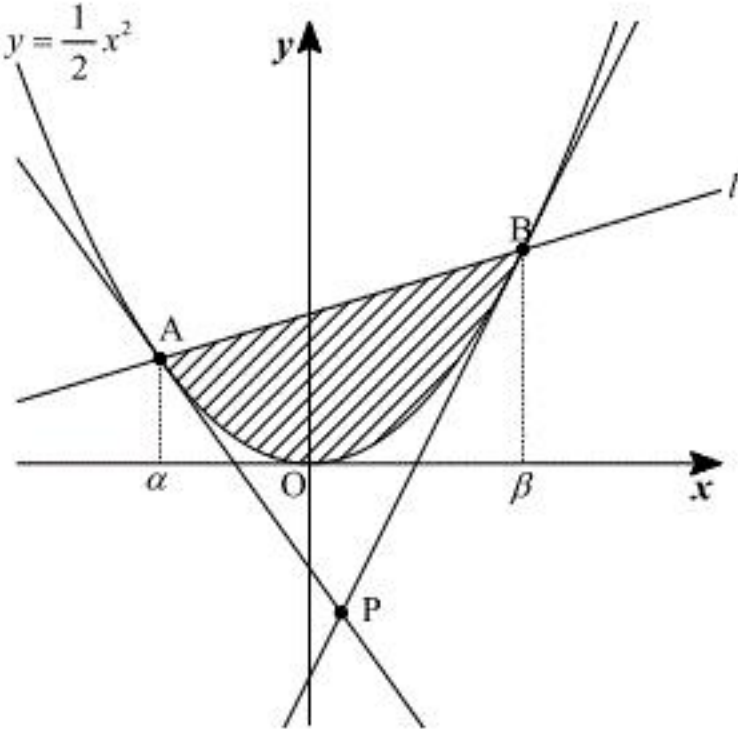
と表せる。したがって、直線 l の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta)(x - \alpha) + \frac{1}{2}\alpha^2 \\ &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta)x - \frac{1}{2}\alpha\beta \\ &= sx - t \end{aligned}$$

である。

(答) $l: y = sx - t$

(iii)



求める面積 S は上図の斜線部の面積であるから、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(sx - t - \frac{1}{2}x^2 \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x^2 - 2sx + 2t) dx \end{aligned}$$

となり、また、 $\textcircled{1}$ より $x^2 - 2sx + 2t = 0$ の 2 解が α, β であるから、

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{6} \right) (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{12} (\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ より $\beta - \alpha = 2\sqrt{s^2 - 2t}$ であるから、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{12} \times 8 (s^2 - 2t)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3} (s^2 - 2t)^{\frac{3}{2}} \quad \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $S = \frac{2}{3} (s^2 - 2t)^{\frac{3}{2}}$

(iv)

$P(s, t)$ が点 $(0, -3)$ を中心とする半径 2 の円周上にあるとき、

$$s^2 + (t + 3)^2 = 4 \quad \cdots \textcircled{5}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} (t + 3)^2 &= 4 - s^2 \leq 4 \\ \Leftrightarrow |t + 3| &\leq 2 \\ \therefore -5 &\leq t \leq -1 \quad \cdots \textcircled{6} \end{aligned}$$

であることに注意する。 $\textcircled{4}, \textcircled{5}$ から s を消去して、

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{3} \left\{ 4 - (t + 3)^2 - 2t \right\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \left(-t^2 - 8t - 5 \right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \left\{ -(t + 4)^2 + 11 \right\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となるので、 $\textcircled{6}$ より S は $t = -4$ のとき最大となる。よって、 S の最大値は、

$$\frac{2}{3} \cdot 11^{\frac{3}{2}} = \frac{22\sqrt{11}}{3}$$

となる。また、 $\textcircled{5}$ に $t = -4$ を代入して、

$$\begin{aligned} s^2 + 1 &= 4 \\ \therefore s &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

となるので、最大値を与える点 P の座標は、

$$P(\pm\sqrt{3}, -4)$$

である。

(答) 最大値： $\frac{22\sqrt{11}}{3}$ ， $P(\pm\sqrt{3}, -4)$