

I

【解答】

(i) ア 2 イ 9 ウ -10

(ii) エ $\frac{17}{36}$

(iii) オ 25π

(iv) カ $8\sqrt{2}+2$

(v) キ 2 ク $\frac{2}{3}\pi$

(vi) ケ $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+1$

(vii) コ 252

(viii) サ 2 シ -3

【解説】

(i) 実数解を α とおく。与えられた方程式は係数がすべて実数であるから、 $1-2i$ が解のとき、共役複素数である $1+2i$ も解となる。したがって、

$$\begin{aligned}x^3-4x^2+ax+b &= (x-1-2i)(x-1-2i)(x-\alpha) \\&= (x^2-2x+5)(x-\alpha) \\&= x^3-(\alpha+2)x^2+(2\alpha+5)x-5\alpha\end{aligned}$$

と表せる。両辺の係数を比較すると、

$$\begin{cases}-4=-(\alpha+2) \\ a=2\alpha+5 \\ b=-5\alpha\end{cases} \\ \therefore \alpha=2, a=9, b=-10$$

となる。

(ii)

直線 $l: y=ax-b$ と放物線 $y=x^2$ が相異なる 2 点で交わるためには、2 次方程式

$$\begin{aligned}x^2 &= ax-b \\ \Leftrightarrow x^2-ax+b &= 0\end{aligned}$$

の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned}D &= a^2-4b > 0 \\ \Leftrightarrow a^2 &> 4b\end{aligned}$$

となればよい。この不等式を満たすような (a, b) は、

$$\begin{aligned}(a, b) &= (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), \\ &\quad (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), \\ &\quad (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), \\ &\quad (6, 5), (6, 6)\end{aligned}$$

の 17 通りである。したがって、求める確率は、 $\frac{17}{36}$ である。

(iii)

$$\begin{aligned}x^2+y^2+6x+4y-12 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (x+3)^2+(y+2)^2 &\leq 5^2\end{aligned}$$

である。したがって、上式は中心 $(-3, -2)$ 、半径 5 の円の内部を表しているので、与式の表す領域の面積は、 25π である。

(iv)

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}x^3+y^3-2xy^2 &= (x+y)^3-3xy(x+y)-2xy^2 \\ &= (x+y)^3-xy(3x+5y) \\ &= (2\sqrt{2})^3-1\cdot\{3(\sqrt{2}+1)+5(\sqrt{2}-1)\} \\ &= 8\sqrt{2}+2\end{aligned}$$

と求まる。

(v)

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta &= 2\left\{\sin\theta\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \\ &= 2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

であるから、 $r=2, \alpha=\frac{2}{3}\pi$ と求まる。

(vi)

与えられた漸化式より、数列 $\{a_n\}$ の項はすべて正であるから、

$$a_{n+1}^3=2a_n^2$$

の両辺で、底を 2 とする対数をとると、

$$\begin{aligned}\log_2 a_{n+1}^3 &= \log 2a_n^2 \\ \Leftrightarrow 3\log_2 a_{n+1} &= 2\log_2 a_n + \log_2 2 \\ \Leftrightarrow \log_2 a_{n+1} - 1 &= \frac{2}{3}(\log_2 a_n - 1)\end{aligned}$$

となる。したがって、数列 $\{\log_2 a_n - 1\}$ は初項 $\log_2 a_1 - 1 = 1$ 、公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから、

$$\begin{aligned}\log_2 a_n - 1 &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ \therefore \log_2 a_n &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 1\end{aligned}$$

と求まる。

(vii)

地点 A から地点 B まで最短ルートで行くためには、 $\uparrow\times 5, \rightarrow\times 5$ の 10 個の矢印を一行に並べて、矢印の通りに順番に進んでいけばよいから、最短ルートは、

$${}_{10}\text{C}_5 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 252 \quad (\text{通り})$$

である。

(viii)

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2-3a^2 \\ &= 3(x+a)(x-a)\end{aligned}$$

である。 $a>0$ より、 $f(x)$ の増減表は下記のとおりである。

x	...	$-a$	...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

したがって、 $f(x)$ は、 $x=-a$ で極大となり、 $x=a$ で極小となる。よって、

$$\begin{aligned}f(-a) &= 13 \\ \Leftrightarrow 2a^3+b &= 13, && \cdots \cdots \textcircled{1} \\ f(a) &= -19 \\ \Leftrightarrow -2a^3+b &= -19 && \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より、

$$(a, b) = (2, -3)$$

と求まる。

II

(i)

$F(x)$ は 2 次関数で、2 次方程式 $F(x)=0$ は $x=2, -3$ を解にもつため、0 でない実数 p を用いて

$$F(x)=p(x-2)(x+3) \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。 $F(5)=12$ より、

$$\begin{aligned} p(5-2)(5+3) &= 12 \\ \Leftrightarrow 24p &= 12 \\ \therefore p &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。これを①に代入して、

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}(x-2)(x+3) \\ &= \frac{1}{2}(x^2+x-6) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad F(x) = \frac{1}{2}(x^2+x-6)$$

(ii)

$$F(x) = 2 \int_a^x f(t) dt$$

のとき、(i) より、

$$x^2+x-6 = 4 \int_a^x f(t) dt \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。②の両辺を微分して、

$$2x+1 = 4f(x)$$

となるので、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4}(2x+1) \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

と求まる。このとき、

$$\begin{aligned} (\textcircled{2} \text{の右辺}) &= 4 \int_a^x \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \right) dt \\ &= \int_a^x (2t+1) dt \\ &= \left[t^2 + t \right]_a^x \\ &= x^2 + x - (a^2 + a) \end{aligned}$$

となるので、②の左辺と比較することで

$$\begin{aligned} a^2 + a &= 6 \\ \Leftrightarrow (a+3)(a-2) &= 0 \\ \therefore a &= -3, 2 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, a = -3, 2$$

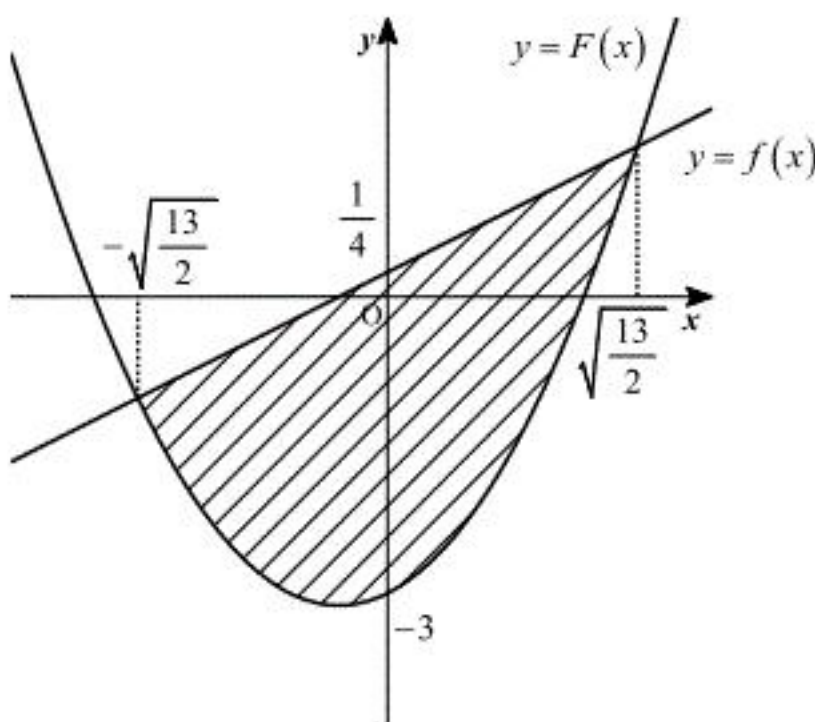
(iii)

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}(x^2+x-6) & \dots \textcircled{3} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

で囲まれる領域の面積を求めればよい。③、④の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x^2+x-6) &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \\ \therefore x &= \pm \sqrt{\frac{13}{2}} \end{aligned}$$

となるので、求める面積は下図の斜線部である。



よって、求める面積は、

$$\begin{aligned} & \int_{-\sqrt{\frac{13}{2}}}^{\sqrt{\frac{13}{2}}} \left\{ \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2}(x^2+x-6) \right\} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\sqrt{\frac{13}{2}}}^{\sqrt{\frac{13}{2}}} \left(x^2 - \frac{13}{2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\sqrt{\frac{13}{2}}}^{\sqrt{\frac{13}{2}}} \left(x + \sqrt{\frac{13}{2}} \right) \left(x - \sqrt{\frac{13}{2}} \right) dx \\ &= \frac{1}{12} \left(\sqrt{\frac{13}{2}} + \sqrt{\frac{13}{2}} \right)^3 \\ &= \frac{1}{12} \left(\sqrt{26} \right)^3 \\ &= \frac{13}{6} \sqrt{26} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{13}{6} \sqrt{26}$$

Ⅲ

(i)

点 **M** の座標は,

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+15}{2}\right) = (2, 9)$$

である。また, 直線 **AB** の方程式は,

$$y-3 = \frac{15-3}{5+1}(x+1) \\ \therefore y = 2x+5$$

である。

(答) $M(2, 9), y = 2x+5$

(ii)

直線 l は直線 **AB** に直交するから, その傾きは $-\frac{1}{2}$ である。また, 直線 l は点 **M** を通るから,

その方程式は,

$$y-9 = -\frac{1}{2}(x-2) \\ \therefore y = -\frac{1}{2}x+10$$

と求まる。

(答) $y = -\frac{1}{2}x+10$

(iii)

(ii) より, 点 **C** の座標は $(0, 10)$ である。点 **P** は線分 **MA** 上にあるから, その座標は,

$$(t, 2t+5) \quad (-1 \leq t \leq 2)$$

と書ける。よって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} &= (t-0, 2t+5-10) \\ &= (t, 2t-5), \\ \overrightarrow{CM} &= (2-0, 9-10) \\ &= (2, -1) \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CP}| &= \sqrt{t^2 + (2t-5)^2} \\ &= \sqrt{5(t^2 - 4t + 5)}, \\ |\overrightarrow{CM}| &= \sqrt{5}, \\ \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CM} &= 2t - (2t-5) \\ &= 5 \end{aligned}$$

となる。 $\theta = \angle PCM$ について,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CM}}{|\overrightarrow{CP}| |\overrightarrow{CM}|} \\ &= \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5(t^2 - 4t + 5)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{t^2 - 4t + 5}} \end{aligned}$$

が成り立つ。

(答) $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 4t + 5}}$

(iv)

$$PM = QM, CM \perp PQ$$

より,

$$\triangle PCQ \text{ が正三角形} \Leftrightarrow \angle PCM = 30^\circ$$

である。したがって, (iii) の答において $\theta = 30^\circ$ とすると

$$\frac{1}{\sqrt{t^2 - 4t + 5}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となるので, 上式の両辺を 2 乗して,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^2 - 4t + 5} &= \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow 3t^2 - 12t + 11 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{6 \pm \sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

と求まるが, $-1 \leq t \leq 2$ より,

$$t = \frac{6 - \sqrt{3}}{3}$$

である。

(答) $t = \frac{6 - \sqrt{3}}{3}$