

I

〔解答〕

(i) ア -2

イ $\frac{2}{3}\pi$

(ii) ウ $1+\sqrt{2}$

(iii) エ $\frac{1}{12}$

(iv) オ $x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x+1$

(v) カ 2

キ 4

〔解答〕

(i)

$$\begin{aligned}\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta &= \cos 2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta \\ &= 2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

であり、 $0\leq\theta\leq\pi$ のとき、

$$\frac{\pi}{6}\leq 2\theta+\frac{\pi}{6}\leq 2\pi+\frac{\pi}{6}$$

であるから、 $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)$ は $2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 、すなわち $\theta=\frac{2}{3}\pi$ のときに最小値 -1 をとるので、

与式は $\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき、最小値 -2 をとる。

(ii)

真数条件より、

$$y>0$$

である。与式に $x=\log_a y$ を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{a^{\log_a y}-a^{-\log_a y}}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{y+\frac{1}{y}}{2} &= 1\end{aligned}$$

となるので、両辺に $2y$ をかけると、

$$\begin{aligned}y^2-2y+1 &= 0 \\ \therefore y &= 1+\sqrt{2} \quad (\because y>0)\end{aligned}$$

と求まる。

(iii)

3桁の自然数が6で割り切れる条件は、各位の和が3の倍数であり、一の位が偶数であることである。サイコロを3回投げてできた自然数が6で割り切れ、さらに桁の並びを逆にしても6で割り切れるためには、一の位と百の位が偶数であり、各位の和が3の倍数となればよい。したがって、出た目を順に a, b, c とすると、 (a, c) は、

$$\begin{aligned}(a, c) &= (2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), \\ &\quad (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\end{aligned}$$

の9通りあり、各々の組に対して、条件を満たす b は2個ずつある。したがって、条件を満たす (a, b, c) の数は、

$$9\cdot 2=18 \quad [\text{通り}]$$

である。したがって、求める確率は、

$$\frac{18}{6^3}=\frac{1}{12}$$

である。

(iv)

条件より、明らかに $P(x)$ は定数や1次式ではない。 $P(x)$ が2次式と仮定すると、

$P(x)=x^2+ax+b$ とおける。このとき、

$$\begin{cases} P(2)=4+2a+b=0 \\ P(0)=b=1 \\ P(1)=1+a+b=2 \end{cases}$$

であるが、上式をすべて満たすような (a, b) は存在しないので、不適である。次に $P(x)$ が3次式と仮定すると、 $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおける。このとき、

$$\begin{cases} P(2)=8+4a+2b+c \\ P(0)=c=1 \\ P(1)=1+a+b+c=2 \end{cases}$$

であるので、これを解くと、

$$(a, b, c)=\left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, 1\right)$$

と求まる。以上より、

$$P(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x+1$$

である。

(v)

三角形OABの外心は、3つの頂点から等距離にあるので、

$$x^2+y^2=(x-4)^2+y^2=(x-6)^2+(y-2)^2$$

である。

$$\begin{aligned}x^2+y^2 &= (x-4)^2+y^2 \\ \Leftrightarrow 8x &= 16 \\ \therefore x &= 2\end{aligned}$$

と求まる。

$$x^2+y^2=(x-6)^2+(y-2)^2$$

に $x=2$ を代入して解くと、

$$\begin{aligned}4+y^2 &= 16+y^2-4y+4 \\ \Leftrightarrow 4y &= 16 \\ \therefore y &= 4\end{aligned}$$

と求まる。以上より、三角OABの外心の座標は、

$$(2, 4)$$

である。 $(2, 4)$ を

$$(x-4)^2+y^2=(x-6)^2+(y-2)^2$$

に代入すると確かに成り立つので十分である。

II

(i)

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{OA^2 + OB^2} \\ &= \sqrt{a + \frac{1}{a}} \\ CA &= \sqrt{OC^2 + OA^2} \\ &= \sqrt{a + \frac{1}{a}} \\ BC &= \sqrt{OB^2 + OC^2} \\ &= \sqrt{2a} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \quad AB = \sqrt{a + \frac{1}{a}}, CA = \sqrt{a + \frac{1}{a}}, BC = \sqrt{2a}$$

(ii)

$\triangle ABC$ において、余弦定理より、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{AB^2 + CA^2 - BC^2}{2AB \cdot CA} \\ &= \frac{1}{a^2 + 1} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \quad \cos \theta = \frac{1}{a^2 + 1}$$

(iii)

θ は三角形の内角であるから、

$$0 < \pi < \pi$$

である。したがって、

$$\sin \theta > 0$$

である。よって、 $\triangle ABC$ の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CA \cdot \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CA \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \cdot \frac{a\sqrt{a^2 + 2}}{a^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 2} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \quad S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 2}$$

(iv)

(iii) より、

$$\frac{S}{BC} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{2} + \frac{1}{a}}$$

である。 $a > 0$ であるから、相加・相乗平均の関係から、

$$\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a}} = \sqrt{2}$$

である。このとき、等号は、

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} &= \frac{1}{a} \\ \therefore a &= \sqrt{2} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

のときに成り立つ。よって、 $\frac{S}{BC}$ は $a = \sqrt{2}$ のとき、最小値 $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$ をとる。

$$(答) \quad \text{最小値: } \frac{\sqrt[4]{2}}{2} \quad (a = \sqrt{2} \text{ のとき})$$

Ⅲ

(i)

$$f'(x)=3x^2-1$$

であるから、

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

となる。したがって、増減表は下記のとおりである。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって、 $f(x)$ は、

$$x=-\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき、極大値 } \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき、極小値 } -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{極大値: } \frac{2\sqrt{3}}{9} \quad (x=-\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき}), \text{ 極小値: } -\frac{2\sqrt{3}}{9} \quad (x=\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき})$$

(ii)

$$C_2: y=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$$

となるので、 C_2 の頂点が $(t, -t^2)$ のとき、

$$t=-\frac{a}{2}$$

$$\therefore a=-2t$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad a=-2t$$

(iii)

$$C_2: y=(x-t)^2-t^2$$

$$=x^2-2tx$$

であるから、 C_1 と C_2 が異なる共有点をちょうど2個もつには、

$$x^3-x=x^2-2tx$$

$$\Leftrightarrow x^3-x^2+(2t-1)x=0$$

が異なる2つの実数解を持てばよい。

$$x^3-x^2+(2t-1)x=0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2-x+2t-1)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0$$

$$\text{または、} x^2-x+2t-1=0 \quad \cdots \text{①}$$

となるので、 C_1 と C_2 が異なる共有点をちょうど2個持つ条件は、

$$\begin{cases} \text{①が} x \neq 0 \text{に重解をもつ} & \cdots \text{②} \\ \text{①が} x=0 \text{及び} x \neq 0 \text{に1つ解をもつ} & \cdots \text{③} \end{cases}$$

である。ここで①の左辺を $f(x)$ とし、 $f(x)=0$ の判別式を D とすると、

$$\text{②} \Leftrightarrow \begin{cases} D=0 \\ f(0) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-4(2t-1)=0 \\ 2t-1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\therefore t=\frac{5}{8}$$

となり、

$$\text{③} \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-4(2t-1) > 0 \\ 2t-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$$

となるので、求める t の条件は、

$$t_1=\frac{1}{2}, t_2=\frac{5}{8}$$

である。

$$(\text{答}) \quad t_1=\frac{1}{2}, t_2=\frac{5}{8}$$

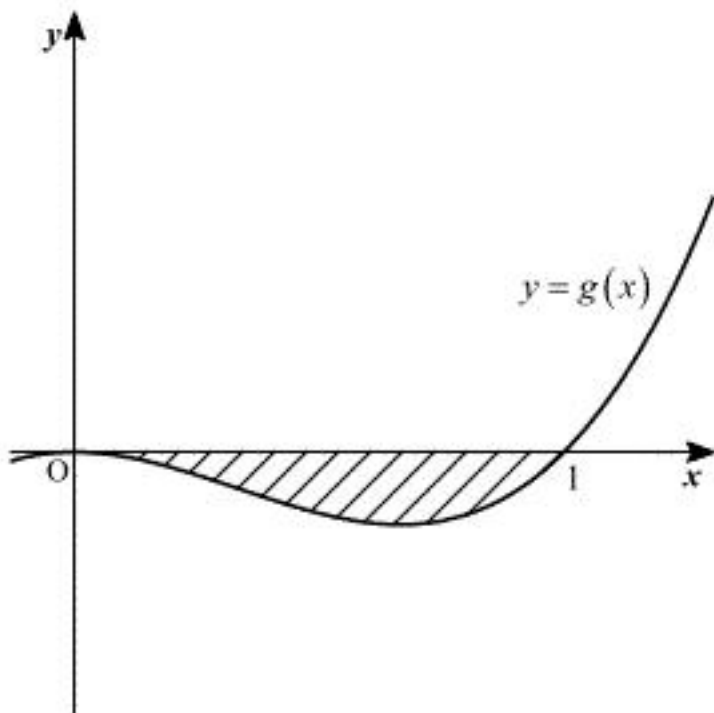
(iv)

$$g(x)=(x^3-x)-(x^2+ax+b)$$

とおくと、 $t=t_1$ のとき、

$$g(x)=x^3-x^2$$

であり、求める面積は曲線 $y=g(x)$ と x 軸で囲まれた面積である。すなわち下图の斜線部である。



したがって、求める面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 -g(x) dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - x^3) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S=\frac{1}{12}$$